開基と sheaf

ゆう [*]

2024 年 4 月 18 日

概要

sieve を用いて sheaf を定義し，Kan 拡張を用いて開基上の sheaf を位相空間上の sheaf に拡張する．最後に，開基上の sheaf の圏と位相空間上の sheaf の圏が圏同値であることを確認する．

目次

1 開基と sheaf

1.1 位相空間上の sheaf

定義． X を位相空間，$\mathcal{O}(X)$ を X の開集合系，U を X の開集合とする．$\mathcal{O}(X)$ の部分集合 S で

(1) 任意の $V \in S$ に対して $V \subseteq U$
(2) 任意の $V \in S$ と $W \in \mathcal{O}(X)$ に対して，$W \subseteq V$ ならば $W \in S$

をみたすものを $\mathcal{O}(X)$ における U 上の sieve という．U 上の sieve S で $U = \bigcup S$ をみたすものを U 上の covering sieve という． □

[*] http://yuu7269.github.io/notes.

U を位相空間 X の開集合とする．$\mathcal{O}(X)$ の部分集合 $\mathcal{U}$ で「任意の $V \in \mathcal{U}$ に対して $V \subseteq U$」をみたすものに対して

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \{\, V \in \mathcal{O}(X) \mid \exists V' \in \mathcal{U}\,(V \subseteq V')\,\}$$

と定めると，これは U 上の sieve である．特に $\mathcal{U}$ が U の開被覆のとき，$\langle \mathcal{U} \rangle$ は U 上の covering sieve である．

定義. $F\colon \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を位相空間 X 上の presheaf とする．任意の $U \in \mathcal{O}(X)$ と，$\mathcal{O}(X)$ における U 上の任意の covering sieve S に対して図式

$$F(U) \xrightarrow{e} \prod_{V \in S} F(V) \overset{r_0}{\underset{r_1}{\rightrightarrows}} \prod_{\langle W,V \rangle} F(W)$$

が equalizer となるとき，F を sheaf という．ここで，e は $V \in S$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "e"] \arrow[dr] & \prod_{V \in S} F(V) \arrow[d] \\ & F(V) \end{tikzcd}$$

を可換にする射であり，r_0, r_1 は $W \subseteq V$ をみたす W, $V \in S$ の組 $\langle W, V \rangle$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} \prod_{V \in S} F(V) \arrow[r, "r_0"] \arrow[dr] & \prod_{\langle W,V \rangle} F(W) \arrow[d] \\ & F(W) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \prod_{V \in S} F(V) \arrow[r, "r_1"] \arrow[d] & \prod_{\langle W,V \rangle} F(W) \arrow[d] \\ F(V) \arrow[r] & F(W) \end{tikzcd}$$

を可換にする射である． □

位相空間 X 上の sheaf を対象とし，自然変換を射とすると圏をなし，これを $\mathbf{Sh}(X)$ と書く．

命題 1. 位相空間 X 上の presheaf $F\colon \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対して，以下は同値である．

(1) F は sheaf である．

(2) 任意の $U \in \mathcal{O}(X)$ と，U の任意の開被覆 $\mathcal{U} = \{\, U_i \mid i \in I \,\}$ に対して図式

$$F(U) \xrightarrow{e'} \prod_i F(U_i) \overset{r'_0}{\underset{r'_1}{\rightrightarrows}} \prod_{\langle i,j \rangle} F(U_i \cap U_j)$$

は equalizer である．ここで，e' は i に対して図式

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "e'"] \arrow[dr] & \prod_i F(U_i) \arrow[d] \\ & F(U_i) \end{tikzcd}$$

を可換にする射であり，r'_0, r'_1 は $i, j \in I$ の組 $\langle i, j\rangle$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} \prod_i F(U_i) \arrow[r, "r'_0"] \arrow[d] & \prod_{\langle i,j\rangle} F(U_i \cap U_j) \arrow[d] \\ F(U_i) \arrow[r] & F(U_i \cap U_j) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \prod_i F(U_i) \arrow[r, "r'_1"] \arrow[d] & \prod_{\langle i,j\rangle} F(U_i \cap U_j) \arrow[d] \\ F(U_j) \arrow[r] & F(U_i \cap U_j) \end{tikzcd}$$

を可換にする射である．

証明． (1) $\Rightarrow$ (2): U を X の開集合，$\mathcal{U} = \{ U_i \mid i \in I \}$ を U の開被覆とし，図式

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] & \prod_i F(U_i) \arrow[r, shift left, "r'_0"] \arrow[r, shift right, "r'_1"'] & \prod_{\langle i,j\rangle} F(U_i \cap U_j) \end{tikzcd}$$

が equalizer となることを示す．図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & \prod_i F(U_i) \arrow[r, shift left, "r'_0"] \arrow[r, shift right, "r'_1"'] & \prod_{\langle i,j\rangle} F(U_i \cap U_j) \end{tikzcd}$$

が可換であるとする．

V を $\langle \mathcal{U} \rangle$ の要素，i, j を I の要素で $V \subseteq U_i, U_j$ をみたすものとしたとき，図式

$$\begin{tikzcd} & & F(U_i) \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] & & \\ A \arrow[r] & \prod_i F(U_i) \arrow[ur] \arrow[dr] & & F(U_i \cap U_j) \arrow[r] & F(V) \\ & & F(U_j) \arrow[ur] \arrow[urr, bend right] & & \end{tikzcd}$$

は可換であるから，合成

$$A \to \prod_i F(U_i) \to F(U_i) \to F(V)$$

は $V \subseteq U_i$ をみたす i のとり方に依らない．

V を $\langle\mathcal{U}\rangle$ の要素とし，i を I の要素で $V \subseteq U_i$ をみたすものとする．積 $\prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V)$ の普遍性から，図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, dashed] \arrow[d] & & \prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V) \arrow[d] \\
\prod_i F(U_i) \arrow[r] & F(U_i) \arrow[r] & F(V)
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

を可換にする射 $A \to \prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V)$ が存在する．特に $U_i \in \langle\mathcal{U}\rangle$ であるから図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V) \arrow[d] \\
\prod_i F(U_i) \arrow[r] & F(U_i)
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

は可換である．

W, V を $\langle\mathcal{U}\rangle$ の要素で $W \subseteq V$ をみたすものとし，i, j を I の要素で $V \subseteq U_i, W \subseteq U_j$ をみたすものとする．組 $\langle W, V\rangle$ に対して図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V) \arrow[r, "r_0"] \arrow[dr] & \prod_{\langle W,V\rangle} F(W) \arrow[d] \\
\prod_i F(U_i) \arrow[r] & F(U_j) \arrow[r] & F(W)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dd] & \prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V) \arrow[r, "r_1"] \arrow[d] & \prod_{\langle W,V\rangle} F(W) \arrow[dd] \\
 & F(V) \arrow[dr] & \\
\prod_i F(U_i) \arrow[r] & F(U_i) \arrow[r] \arrow[u] & F(W)
\end{tikzcd}
$$

は共に可換であるから，積 $\prod_{\langle W,V\rangle} F(W)$ の普遍性により図式

$$
A \longrightarrow \prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V) \underset{r_1}{\overset{r_0}{\rightrightarrows}} \prod_{\langle W,V\rangle} F(W)
$$

は可換である．よって，equalizer $F(U)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] & \prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V) \\ A \arrow[u, dashed] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $A \to F(U)$ が存在する．

I の要素 i に対して図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & F(U) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr] & \prod_i F(U_i) \arrow[d] \\ \prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V) \arrow[rr] & & F(U_i) \end{tikzcd}$$

と図式 3 は共に可換であるから，積 $\prod_i F(U_i)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] & \prod_i F(U_i) \\ A \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{4}$$

は可換である．

図式 4 を可換にする射 $A \to F(U)$ が与えられたとする．V を $\langle\mathcal{U}\rangle$ の要素とし，i を I の要素で $V \subseteq U_i$ をみたすものとする．このとき，図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & F(U) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V) \arrow[d] \\ \prod_i F(U_i) \arrow[r] & F(U_i) \arrow[r] & F(V) \end{tikzcd}$$

と図式 2 が共に可換であるから，積 $\prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] & \prod_{V\in\langle\mathcal{U}\rangle} F(V) \\ A \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

は可換である．故に equalizer $F(U)$ の普遍性から，図式 4 を可換にする射 $A \to F(U)$ の一意性が従う．

(2) $\Rightarrow$ (1): U を X の開集合，S を U 上の covering sieve とし，図式

$$F(U) \longrightarrow \prod_{V\in S} F(V) \underset{r_1}{\overset{r_0}{\rightrightarrows}} \prod_{\langle W,V\rangle} F(W)$$

が equalizer となることを示す．ここで $\langle W,V\rangle$ は $W \subseteq V$ をみたす W, $V \in S$ の組である．図式

$$A \longrightarrow \prod_{V\in S} F(V) \underset{r_1}{\overset{r_0}{\rightrightarrows}} \prod_{\langle W,V\rangle} F(W)$$

が可換であるとする．このとき，$\langle W,V\rangle$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & \prod_{V\in S} F(V) \arrow[r] \arrow[dr] & F(V) \arrow[d] \\ & & F(W) \end{tikzcd}$$

は可換である．

W, $V \in S$ の組 $\langle W,V\rangle$ に対して，r_0' について図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & \prod_{V\in S} F(V) \arrow[rr, "r_0'"] \arrow[dr] \arrow[drr, bend right] & & \prod_{\langle W,V\rangle\in S\times S} F(W\cap V) \arrow[d] \\ & & F(W) \arrow[r] & F(W\cap V) \end{tikzcd}$$

は可換であり，r_1' についても同様に可換である．よって，積 $\prod_{\langle W,V\rangle\in S\times S} F(W\cap V)$ の普遍性により図式

$$A \longrightarrow \prod_{V\in S} F(V) \underset{r_1'}{\overset{r_0'}{\rightrightarrows}} \prod_{\langle W,V\rangle\in S\times S} F(W\cap V)$$

は可換であり，equalizer $F(U)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] & \prod_{V\in S} S(V) \\ A \arrow[u, dashed] \arrow[ur] \end{tikzcd} \tag{5}$$

を可換にする射 $A \to F(U)$ が存在する．

equalizer $F(U)$ の普遍性から，図式 5 を可換にする射 $A \to F(U)$ の一意性が従う． □

1.2 開基上の sheaf の拡張

定義. $\mathcal{B}$ を位相空間 X の開基とし，$B \in \mathcal{B}$ とする．$\mathcal{B}$ の部分集合 S で

(1) 任意の $V \in S$ に対して $V \subseteq B$

(2) 任意の $V \in S$ と $W \in \mathcal{B}$ に対して，$W \subseteq V$ ならば $W \in S$

をみたすものを $\mathcal{B}$ における B 上の sieve という．B 上の sieve S で $B = \bigcup S$ をみたすものを B 上の covering sieve という． □

B を位相空間 X の開基 $\mathcal{B}$ の要素とする．$\mathcal{B}$ の部分集合 $\mathcal{U}$ で「任意の $V \in \mathcal{U}$ に対して $V \subseteq B$」をみたすものに対して

$$\langle \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{B}} = \{\, V \in \mathcal{B} \mid \exists V' \in \mathcal{U}\,(V \subseteq V')\,\}$$

と定めると，これは B 上の sieve である．特に $\mathcal{U}$ が B の開被覆のとき，$\langle \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{B}}$ は B 上の covering sieve である．

定義. $G\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を位相空間 X の開基 $\mathcal{B}$ 上の presheaf とする．任意の $B \in \mathcal{B}$ と，$\mathcal{B}$ における B 上の任意の covering sieve S に対して図式

$$G(B) \xrightarrow{\ e\ } \prod_{V \in S} G(V) \underset{r_1}{\overset{r_0}{\rightrightarrows}} \prod_{\langle W, V \rangle} G(W)$$

が equalizer となるとき，G を sheaf という．ここで，e, r_0, r_1 は位相空間上の sheaf の定義に現れたものと同様の射である． □

※ 位相空間 X の開基 $\mathcal{B}$ が「任意の $B, B' \in \mathcal{B}$ に対して $B \cap B' \in \mathcal{B}$」をみたすとき，命題 1 と同様の命題が $\mathcal{B}$ 上の presheaf に対して成り立つ．

位相空間 X の開基 $\mathcal{B}$ 上の sheaf を対象とし，自然変換を射とすると圏をなし，これを $\mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ と書く．

$i\colon \mathcal{B} \to \mathcal{O}(X)$ を包含函手とし，$G\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を $\mathcal{B}$ 上の sheaf とする．$\mathbf{Set}$ は完備であり，$\mathcal{B}$ は小圏であるから，i^{op} に沿った G の右 Kan 拡張 $\langle (i^{\mathrm{op}})^{\ddagger} G, \epsilon_G \rangle$ が存在し，各

$U \in \mathcal{O}(X)$ に対して

$$
\begin{aligned}
((i^{\mathrm{op}})^{\ddagger} G)(U) &\cong \lim(U \downarrow (i^{\mathrm{op}}) \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{G} \mathbf{Set}) \\
&= \lim_{B \subseteq U} G(B)
\end{aligned}
$$

である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "U"] & \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "(i^{\mathrm{op}})^{\ddagger} G"] & \\
U \downarrow (i^{\mathrm{op}}) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\searrow"] & \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \arrow[u, "i^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \epsilon_G"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

命題 6. $\mathcal{B}$ 上の sheaf $G \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対して，i^{op} に沿った G の右 Kan 拡張 $(i^{\mathrm{op}})^{\ddagger} G$ は X 上の sheaf である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "(i^{\mathrm{op}})^{\ddagger} G"] & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \arrow[u, "i^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \epsilon_G"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

証明. $(i^{\mathrm{op}})^{\ddagger} G = \widetilde{G}$ とおく．U を X の開集合，S を $\mathcal{O}(X)$ における U 上の covering sieve とし，図式

$$
\widetilde{G}(U) \longrightarrow \prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \rightrightarrows \prod_{\langle W, V \rangle} \widetilde{G}(W)
$$

が equalizer となることを示す．ここで $\langle W, V \rangle$ は $W \subseteq V$ をみたす W, $V \in S$ の組である．図式

$$
A \longrightarrow \prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \rightrightarrows \prod_{\langle W, V \rangle} \widetilde{G}(W)
$$

が可換であるとする．このとき，$\langle W, V \rangle$ に対して図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & \prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \arrow[r] \arrow[dr] & \widetilde{G}(V) \arrow[d] \\
& & \widetilde{G}(W)
\end{tikzcd}
$$

は可換である．

B を $\mathcal{B}$ の要素で $B \subseteq U$ をみたすものとし，

$$
S_B = \{ V \in S \mid V \subseteq B \} \cap \mathcal{B}
$$

とおく．これは $\mathcal{B}$ における B 上の covering sieve である．積 $\prod_{V \in S_B} G(V)$ の普遍性から，$V \in S_B$ に対して図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, dashed] \arrow[d] & & \prod_{V \in S_B} G(V) \arrow[d] \\
\prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \arrow[r] & \widetilde{G}(V) \arrow[r] & G(V)
\end{tikzcd}
\tag{7}
$$

を可換にする射 $A \to \prod_{V \in S_B} G(V)$ が存在する．

　$W \subseteq V$ をみたす $W,\ V \in S_B$ の組 $\langle W, V\rangle$ に対して，図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{V \in S_B} G(V) \arrow[r, "r_0"] \arrow[dr] & \prod_{\langle W,V\rangle} G(W) \arrow[d] \\
\prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \arrow[r] & \widetilde{G}(W) \arrow[r] & G(W)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dd] & & \prod_{V \in S_B} G(V) \arrow[r, "r_1"] \arrow[d] & \prod_{\langle W,V\rangle} G(W) \arrow[dd] \\
& \widetilde{G}(V) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[drr] & G(V) \arrow[dr] & \\
\prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \arrow[ur] \arrow[r] & \widetilde{G}(W) \arrow[rr] & & G(W)
\end{tikzcd}
$$

は共に可換であるから，積 $\prod_{\langle W,V\rangle} G(W)$ の普遍性により図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & \prod_{V \in S_B} G(V) \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & \prod_{\langle W,V\rangle} G(W)
\end{tikzcd}
$$

は可換である．equalizer $G(B)$ の普遍性により図式

$$
\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r] & \prod_{V \in S_B} G(V) \\
A \arrow[u, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\tag{8}
$$

を可換にする射 $A \to G(B)$ が存在する．

$B,\, B'$ を $\mathcal{B}$ の要素で $B' \subseteq B \subseteq U$ をみたすものとする．このとき $S_{B'} \subseteq S_B$ であり，積 $\prod_{V' \in S_{B'}} G(V')$ の普遍性から，$V' \in S_{B'}$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
\prod_{V \in S_B} G(V) \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & \prod_{V' \in S_{B'}} G(V') \arrow[d] \\
& G(V')
\end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\prod_{V \in S_B} G(V) \to \prod_{V' \in S_{B'}} G(V')$ が存在する．$V' \in S_{B'}$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
G(B') \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\prod_{V' \in S_{B'}} G(V') \arrow[r] & G(V')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
\prod_{V \in S_B} G(V) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\prod_{V' \in S_{B'}} G(V') \arrow[r] & G(V')
\end{tikzcd}$$

は共に可換であるから，積 $\prod_{V' \in S_{B'}} G(V')$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r] \arrow[d] & G(B') \arrow[d] \\
\prod_{V \in S_B} G(V) \arrow[r] & \prod_{V' \in S_{B'}} G(V')
\end{tikzcd}$$

は可換である．$V' \in S_{B'}$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[dd] & G(B) \arrow[r] \arrow[d] & G(B') \arrow[d] \\
& \prod_{V \in S_B} G(V) \arrow[r] \arrow[dr] & \prod_{V' \in S_{B'}} G(V') \arrow[d] \\
\prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \arrow[r] & \widetilde{G}(V') \arrow[r] & G(V')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[drr] \arrow[dd] & & G(B') \arrow[d] \\
& & \prod_{V' \in S_{B'}} G(V') \arrow[d] \\
\prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \arrow[r] & \widetilde{G}(V') \arrow[r] & G(V')
\end{tikzcd}$$

は共に可換であるから，積 $\prod_{V' \in S_{B'}} G(V')$ の普遍性と equalizer $G(B')$ の普遍性により図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] & G(B) \arrow[d] \\
 & G(B')
\end{tikzcd}
$$

は可換である．故に射 $A \to G(B)$ は B について自然であり，極限 $\widetilde{G}(U)$ の普遍性から，$B \subseteq U$ をみたす $B \in \mathcal{B}$ に対して図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & \widetilde{G}(U) \arrow[d] \\
 & G(B)
\end{tikzcd}
$$

を可換にする射 $A \to \widetilde{G}(U)$ が存在する．

V を S の要素，B を $\mathcal{B}$ の要素で $B \subseteq V$ をみたすものとする．このとき $B \in S$ であるから $B \in S_B$ となる．図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddrr] \arrow[dd, bend right=60] & \widetilde{G}(U) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \arrow[d] \\
G(B) \arrow[d] \arrow[drr, "\mathrm{id}"] & & \widetilde{G}(V) \arrow[d] \\
\prod_{V \in S_B} G(V) \arrow[rr] & & G(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dd] & & \prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \arrow[dl] \arrow[d] \\
 & \widetilde{G}(B) \arrow[dr] & \widetilde{G}(V) \arrow[l] \arrow[d] \\
\prod_{V \in S_B} G(V) \arrow[rr] & & G(B)
\end{tikzcd}
$$

は共に可換であるから，極限 $\widetilde{G}(V)$ の普遍性と積 $\prod_{V \in S} \widetilde{G}(V)$ の普遍性により図式

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{G}(U) \arrow[r] & \prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \\
A \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\tag{9}
$$

は可換である．

図式 9 を可換にする射 $A \to \widetilde{G}(U)$ が与えられたとする．B を $\mathcal{B}$ の要素で $B \subseteq U$ をみ

たすものとし，V を S_B の要素とする．図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{G}(U) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drr] & G(B) \arrow[r] \arrow[dr] & \prod\limits_{V \in S_B} G(V) \arrow[d] \\
\prod\limits_{V \in S} \widetilde{G}(V) \arrow[r] & \widetilde{G}(V) \arrow[rr] & & G(V)
\end{tikzcd}$$

と図式 7 は共に可換であるから，積 $\prod\limits_{V \in S_B} G(V)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G}(U) \arrow[r] & G(B) \arrow[r] & \prod\limits_{V \in S_B} G(V) \\
A \arrow[u] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

は可換である．したがって，図式 8, 図式 10 は共に可換であるから，equalizer $G(B)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G}(U) \arrow[r] & G(B) \\
A \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

は可換である．よって，極限 $\widetilde{G}(U)$ の普遍性から，図式 9 を可換にする射 $A \to \widetilde{G}(U)$ の一意性が従う． $\square$

1.3 開基上の sheaf と位相空間上の sheaf

$F \colon \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を X 上の sheaf とする．F に $i^{\mathrm{op}} \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}$ を合成することで，$\mathcal{B}$ 上の presheaf $F \circ i^{\mathrm{op}} \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を得る．

命題 11. X 上の sheaf $F \colon \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対して，合成 $F \circ i^{\mathrm{op}}$ は $\mathcal{B}$ 上の sheaf である．

証明. B を $\mathcal{B}$ の要素，S を $\mathcal{B}$ における B 上の covering sieve とし，図式

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r] & \prod\limits_{V \in S} F(V) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{\langle W, V \rangle} F(W)
\end{tikzcd}$$

が equalizer となることを示す．ここで $\langle W, V\rangle$ は $W \subseteq V$ をみたす W, $V \in S$ の組である．図式

$$A \longrightarrow \prod_{V\in S} F(V) \rightrightarrows \prod_{\langle W,V\rangle} F(W)$$

が可換であるとする．このとき，$\langle W, V\rangle$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & \prod\limits_{V\in S} F(V) \arrow[r] \arrow[dr] & F(V) \arrow[d] \\
 & & F(W)
\end{tikzcd}$$

は可換である．

$V \in \langle S\rangle$ に対して

$$S_V = \{\, W \in S \mid W \subseteq V \,\}$$

とおく．これは V の開被覆である．

V を $\langle S\rangle$ の要素，V', V'' を S の要素で $V \subseteq V'$, V'' をみたすものとし，W を $\langle S_V\rangle$ の要素，W' を S_V の要素で $W \subseteq W'$ をみたすものとする．このとき，V' について図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & \prod\limits_{V\in S} F(V) \arrow[r] \arrow[drr] & F(V') \arrow[r] \arrow[dr] & F(V) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \prod\limits_{W\in\langle S_V\rangle} F(W) \arrow[d] \\
 & & & F(W') \arrow[r] & F(W)
\end{tikzcd}$$

は可換であり，V'' についても同様に可換である．よって，積 $\prod\limits_{W\in\langle S_V\rangle} F(W)$ の普遍性と equalizer $F(V)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
 & & F(V') \arrow[dr] & \\
A \arrow[r] & \prod\limits_{V\in S} F(V) \arrow[ur] \arrow[dr] & & F(V) \\
 & & F(V'') \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

は可換である．つまり，$V \in \langle S\rangle$ に対して合成

$$A \to \prod_{V\in S} F(V) \to F(V') \to F(V)$$

は $V \subseteq V'$ をみたす $V' \in S$ のとり方に依らない．

V を $\langle S\rangle$ の要素とし，V' を S の要素で $V \subseteq V'$ をみたすものとする．積 $\prod\limits_{V\in\langle S\rangle} F(V)$ の普遍性から，図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, dashed] \arrow[d] & & \prod\limits_{V\in\langle S\rangle} F(V) \arrow[d] \\
\prod\limits_{V\in S} F(V) \arrow[r] & F(V') \arrow[r] & F(V)
\end{tikzcd}
\tag{12}
$$

を可換にする射 $A \to \prod\limits_{V\in\langle S\rangle} F(V)$ が存在する．特に $V \in S$ に対して図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{V\in\langle S\rangle} F(V) \arrow[d] \\
\prod\limits_{V\in S} F(V) \arrow[r] & F(V)
\end{tikzcd}
\tag{13}
$$

は可換である．

W, V を $\langle S\rangle$ の要素で $W \subseteq V$ をみたすものとし，V', W' を S の要素で $V \subseteq V'$, $W \subseteq W'$ をみたすものとする．組 $\langle W, V\rangle$ に対して図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{V\in\langle S\rangle} F(V) \arrow[r, "r_0"] \arrow[dr] & \prod\limits_{\langle W,V\rangle} F(W) \arrow[d] \\
\prod\limits_{V\in S} F(V) \arrow[r] & F(W') \arrow[r] & F(W)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dd] & \prod\limits_{V\in\langle S\rangle} F(V) \arrow[r, "r_1"] \arrow[d] & \prod\limits_{\langle W,V\rangle} F(W) \arrow[dd] \\
& F(V) \arrow[dr] & \\
\prod\limits_{V\in S} F(V) \arrow[r] & F(V') \arrow[u] \arrow[r] & F(W)
\end{tikzcd}
$$

は共に可換であるから，積 $\prod\limits_{\langle W,V\rangle} F(W)$ の普遍性により図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & \prod\limits_{V\in\langle S\rangle} F(V) \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & \prod\limits_{\langle W,V\rangle} F(W)
\end{tikzcd}
$$

は可換である．よって，equalizer $F(B)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r] & \prod_{V\in\langle S\rangle} F(V) \\
A \arrow[u, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

を可換にする射 $A \to F(B)$ が存在する．

$V \in S$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & F(B) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr] & \prod_{V\in S} F(V) \arrow[d] \\
\prod_{V\in\langle S\rangle} F(V) \arrow[rr] & & F(V)
\end{tikzcd}$$

と図式 13 は共に可換であるから，積 $\prod_{V\in S} F(V)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r] & \prod_{V\in S} F(V) \\
A \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{14}$$

は可換である．

図式 14 を可換にする射 $A \to F(B)$ が与えられたとする．V を $\langle S\rangle$ の要素とし，V' を S の要素で $V \subseteq V'$ をみたすものとする．このとき，図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & F(B) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \prod_{V\in\langle S\rangle} F(V) \arrow[d] \\
\prod_{V\in S} F(V) \arrow[r] & F(V') \arrow[r] & F(V)
\end{tikzcd}$$

と図式 12 が共に可換であるから，積 $\prod_{V\in\langle S\rangle} F(V)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r] & \prod_{V\in\langle S\rangle} F(V) \\
A \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

は可換である．故に equalizer $F(B)$ の普遍性から，図式 14 を可換にする射 $A \to F(B)$ の一意性が従う． □

命題 15. 位相空間 X 上の sheaf F に対して，$\langle F, \mathrm{id} \rangle$ は i^{op} に沿った $F \circ i^{\mathrm{op}}$ の右 Kan 拡張である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[rrd, "F"] & & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \arrow[u, "i^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "i^{\mathrm{op}}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

証明. $P\colon \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を X 上の presheaf とし，$\theta\colon P \circ i^{\mathrm{op}} \Rightarrow F \circ i^{\mathrm{op}}$ を自然変換とする．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[rrd, bend left, "P"] & & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \arrow[u, "i^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "i^{\mathrm{op}}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

X の開集合 U に対して

$$\mathcal{B}_U = \{\, B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U \,\}$$

とおく．これは U の開被覆である．

U を X の開集合，V を $\langle \mathcal{B}_U \rangle$ の要素とし，B, B' を $\mathcal{B}_U$ の要素で $V \subseteq B$, B' をみたすものとする．$V' \in \langle \mathcal{B}_V \rangle$ とし，B'' を $\mathcal{B}_V$ の要素で $V' \subseteq B''$ をみたすものとする．このとき，B について図式

$$\begin{tikzcd}
P(U) \arrow[r] \arrow[drr] & P(B) \arrow[r, "\theta_B"] \arrow[dr] & F(B) \arrow[r] \arrow[dr] & F(V) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \prod\limits_{V' \in \langle \mathcal{B}_V \rangle} F(V') \arrow[d] \\
& & P(B'') \arrow[r, "\theta_{B''}"] & F(B'') \arrow[r] & F(V')
\end{tikzcd}$$

は可換であり，B' についても同様に可換である．よって，積 $\prod\limits_{V' \in \langle \mathcal{B}_V \rangle} F(V')$ の普遍性と equalizer $F(V)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
& P(B) \arrow[r, "\theta_B"] & F(B) \arrow[dr] & \\
P(U) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & F(V) \\
& P(B') \arrow[r, "\theta_{B'}"] & F(B') \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

は可換である．つまり，合成

$$P(U) \to P(B) \xrightarrow{\theta_B} F(B) \to F(V)$$

は $V \subseteq B \subseteq U$ をみたす $B \in \mathcal{B}$ のとり方に依らない．

V を $\langle \mathcal{B}_U \rangle$ の要素とし，B を $\mathcal{B}_U$ の要素で $V \subseteq B$ をみたすものとする．積 $\prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V)$ の普遍性から，図式

$$\begin{tikzcd} P(U) \arrow[rr, dashed] \arrow[d] & & \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V) \arrow[d] \\ P(B) \arrow[r, "\theta_B"] & F(B) \arrow[r] & F(V) \end{tikzcd} \tag{16}$$

を可換にする射 $P(U) \to \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V)$ が存在する．

W, V を $\langle \mathcal{B}_U \rangle$ の要素で $W \subseteq V$ をみたすものとし，B_W, B_V を $\mathcal{B}_U$ の要素で $W \subseteq B_W$, $V \subseteq B_V$ をみたすものとする．組 $\langle W, V \rangle$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} P(U) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V) \arrow[r, "r_0"] \arrow[dr] & \prod_{\langle W, V \rangle} F(W) \arrow[d] \\ P(B_W) \arrow[r, "\theta_{B_W}"] & F(B_W) \arrow[r] & F(W) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P(U) \arrow[r] \arrow[dd] & \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V) \arrow[r, "r_1"] \arrow[d] & \prod_{\langle W, V \rangle} F(W) \arrow[dd] \\ & F(V) \arrow[dr] & \\ P(B_V) \arrow[r, "\theta_{B_V}"] & F(B_V) \arrow[u] \arrow[r] & F(W) \end{tikzcd}$$

は共に可換であるから，積 $\prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd} P(U) \arrow[r] & \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V) \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & \prod_{\langle W, V \rangle} F(W) \end{tikzcd}$$

は可換である．故に equalizer $F(U)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] & \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V) \\ P(U) \arrow[u, dashed, "\sigma_U"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\sigma_U \colon P(U) \to F(U)$ が存在する．

U, U' を X の開集合で $U \subseteq U'$ をみたすものとし，V を $\langle \mathcal{B}_U \rangle$ の要素，B を $\mathcal{B}_U$ の要素で $V \subseteq B$ をみたすものとする．図式

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] \arrow[dr] & \prod\limits_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V) \arrow[d] \\
F(U') \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dr] & F(V) \\
P(U') \arrow[u, "\sigma_{U'}"] \arrow[r] & \prod\limits_{V' \in \langle \mathcal{B}_{U'} \rangle} F(V') \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} & F(U) \arrow[r] & \prod\limits_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V) \arrow[dr] & {} \\
P(U) \arrow[ur, "\sigma_U"] \arrow[urr] \arrow[r] & P(B) \arrow[r, "\theta_B"] & F(B) \arrow[r] & F(V) \\
{} & P(U') \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[r] & \prod\limits_{V' \in \langle \mathcal{B}_{U'} \rangle} F(V') \arrow[ur] & {}
\end{tikzcd}$$

は共に可換であるから，積 $\prod\limits_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V)$ の普遍性と equalizer $F(U)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
P(U') \arrow[r, "\sigma_{U'}"] \arrow[d] & F(U') \arrow[d] \\
P(U) \arrow[r, "\sigma_U"] & F(U)
\end{tikzcd}$$

は可換である．故に $\sigma = \langle \sigma_U \rangle_U$ は自然変換 $P \Rightarrow F$ である．

B を $\mathcal{B}$ の要素とし，V を $\langle \mathcal{B}_B \rangle$ の要素とする．図式

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[rrr] & & & \prod\limits_{V \in \langle \mathcal{B}_B \rangle} F(V) \arrow[d] \\
P(B) \arrow[u, "\sigma_B"] \arrow[urrr] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & P(B) \arrow[r, "\theta_B"'] & F(B) \arrow[r] & F(V)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[rrr] \arrow[drrr] & & & \prod\limits_{V \in \langle \mathcal{B}_B \rangle} F(V) \arrow[d] \\
P(B) \arrow[u, "\theta_B"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & P(B) \arrow[r, "\theta_B"'] & F(B) \arrow[r] & F(V)
\end{tikzcd}$$

は共に可換であるから，equalizer $F(B)$ の普遍性により $\sigma_B = \theta_B$ が従う．故に

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[rrd, bend left, "P"] \arrow[rrd, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] \arrow[rrd, phantom, shift left=2ex, "\Swarrow\sigma"] & & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \arrow[u, "i^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "i^{\mathrm{op}}"'] & \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[rrd, bend left, "P"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta"] & & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \arrow[u, "i^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "i^{\mathrm{op}}"'] & \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
\tag{17}$$

となる．

等式 17 をみたす自然変換 $\sigma\colon P \Rightarrow F$ が与えられたとする．U を X の開集合，V を $\langle \mathcal{B}_U \rangle$ の要素，B を $\mathcal{B}_U$ の要素で $V \subseteq B$ をみたすものとする．図式

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[rrr] \arrow[drrr] & & & \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_B \rangle} F(V) \arrow[d] \\
P(U) \arrow[u, "\sigma_U"] \arrow[r] & P(B) \arrow[r, "\theta_B = \sigma_B"] & F(B) \arrow[r] & F(V)
\end{tikzcd}$$

と図式 16 は共に可換であるから，積 $\prod_{V \in \langle \mathcal{B}_B \rangle} F(V)$ の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] & \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V) \\
P(U) \arrow[u, "\sigma_U"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

は可換である．故に equalizer $F(U)$ の普遍性から，この図式を可換にする σ_U は一意である．よって，等式 17 をみたす自然変換 σ は一意である． □

※ 包含函手 $i\colon \mathcal{B} \to \mathcal{O}(X)$ に対して，組 $\langle \mathrm{id}_{\mathcal{O}(X)}, \mathrm{id}_i \rangle$ は i に沿った i の各点左 Kan 拡張である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X) \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathcal{O}(X)}"] & \\
\mathcal{B} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_i"] & \mathcal{O}(X)
\end{tikzcd}$$

故に命題 15 から，X 上の sheaf F が右 Kan 拡張 $\langle \mathrm{id}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{O}(X)}, \mathrm{id}^{\mathrm{op}}_i \rangle$ を保つことがわかる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "\mathrm{id}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{O}(X)}"] & & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \arrow[u, "i^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "i^{\mathrm{op}}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}^{\mathrm{op}}_i"] & \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[drr, "F"] & & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \arrow[u, "i^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "i^{\mathrm{op}}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}"] & \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

函手 $\mathbf{s}\colon \mathbf{Sh}(\mathcal{B}) \to \mathbf{Sh}(X)$ を $G \mapsto (i^{\mathrm{op}})^{\ddagger} G$ で定め，函手 $\mathbf{r}\colon \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ を $F \mapsto F \circ i^{\mathrm{op}}$ で定める．

命題 18. $\mathbf{s}$ は $\mathbf{r}$ の右随伴函手である．

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(F, \mathbf{s}(G)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(\mathcal{B})}(\mathbf{r}(F), G)$$

証明. 右 Kan 拡張の普遍性から従う. □

定理 19. X 上の sheaf の圏 $\mathbf{Sh}(X)$ と X の開基 $\mathcal{B}$ 上の sheaf の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ は圏同値である.

証明. 命題 15 から $\mathbf{s} \circ \mathbf{r} \cong \mathrm{id}$ が従う. $G\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を $\mathcal{B}$ 上の sheaf とし, $\langle \mathbf{s}(G), \epsilon_G \rangle$ を i^{op} に沿った G の右 Kan 拡張とする. $\mathbf{s}(G)$ が各点右 Kan 拡張であり, i が忠実充満であるから, $\epsilon_G\colon (\mathbf{r} \circ \mathbf{s})(G) \Rightarrow G$ は同型である.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "\mathbf{s}(G)=(i^{\mathrm{op}})^{\ddagger}G"] & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \arrow[u, "i^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\epsilon_G"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

故に $\mathbf{r} \circ \mathbf{s} \cong \mathrm{id}$ が従う. □

参考文献

[Emi] Emily (https://math.stackexchange.com/users/603207/emily). Alternative Construction of Sheaf from Sheaf on a Base. Mathematics Stack Exchange. URL: https://math.stackexchange.com/q/2990806 (version: 2020-09-01).

[MLM92] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[Rie16] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2016.