有限集合の定義と選択公理 *

@hyutw†

2021 年 12 月 11 日

以下，ことわりがない限り選択公理を仮定せず，公理系 ZF で考えているものとする．自然数 n とは，n 未満の自然数全体の集合のことであるとする：

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{\, 0 \,\}, \quad 2 = \{\, 0, 1 \,\}, \ldots \quad n + 1 = n \cup \{\, n \,\}, \ldots$$

自然数全体の集合を $\mathbf{N}$ と書く．集合 X から集合 Y への写像全体を Y^X と書く．ここでは自然数 $n \in \mathbf{N}$ と集合 X に対して，X^n は n から X への写像全体を表している．$|X|$ で集合 X の濃度を表す．集合の濃度を基数という．

定義． X, Y を集合とする．

(1) $|X| \le |Y| :\Longleftrightarrow$ 単射 $X \to Y$ が存在する．
(2) $|X| = |Y| :\Longleftrightarrow$ 全単射 $X \to Y$ が存在する．
(3) $|X| < |Y| :\Longleftrightarrow |X| \le |Y|$ かつ $|X| \ne |Y|$．
(4) $|X| \le^* |Y| :\Longleftrightarrow X = \emptyset$ または全射 $Y \to X$ が存在する．
(5) $|X| <^* |Y| :\Longleftrightarrow |X| \le^* |Y|$ かつ $|X| \ne |Y|$．

定義． κ, λ を基数とし，$\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$, $X \cap Y = \emptyset$ をみたす集合 X, Y を取る．

(1) $\kappa + \lambda := |X \cup Y|$．
(2) $\kappa \cdot \lambda := |X \times Y|$．
(3) $\kappa^\lambda := \left|X^Y\right|$．

命題 1． 2 元集合 $\{\, 0, 1 \,\}$ の濃度を 2 と表す．任意の基数 κ に対して $2 \cdot \kappa = \kappa + \kappa$, $\kappa^2 = \kappa \cdot \kappa$ である． □

---

* 本稿は Math Advent Calendar 2021 (`https://adventar.org/calendars/6146`) の 11 日目の記事です．

† Twitter: `https://twitter.com/hyutw`.

定義. 集合 X が整列可能であるとき，$|X|$ を整列可能基数という．自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ は整列可能であり，この集合の濃度を $\aleph_0$ で表す.

以下の基数に関するいくつかの命題の証明は [1, 6] を参照のこと.

命題 2. 整列可能無限基数 $\aleph$ に対して $\aleph^2 = \aleph$. □

命題 3. $\aleph, \aleph'$ が 0 でない整列可能基数で，少なくとも一方が無限基数であるとき,

$$\aleph + \aleph' = \aleph \cdot \aleph' = \max \{ \aleph, \aleph' \}. \qquad \square$$

命題 4. 基数 κ, λ, μ と整列可能基数 $\aleph$ が $\kappa \cdot \aleph \leq \lambda + \mu$ をみたすとき，$\kappa \leq \lambda$ または $\aleph \leq \mu$ となる. □

命題 5. 以下は同値である.

(1) 選択公理.
(2) 無限基数 κ, λ に対して $\kappa + \lambda = \kappa$ または $\kappa + \lambda = \lambda$. □

命題 6. 任意の集合 X に対して，$|\alpha| \not\leq |X|$ をみたす順序数 α が存在する. □

集合 X に対して，$|\alpha| \not\leq |X|$ をみたす最小の順序数を $\mathit{\Gamma}(X)$ とおく．この $\mathit{\Gamma}$ を Hartogs 関数という．明らかに $|\mathit{\Gamma}(X)| \not\leq |X|$ である．$\kappa = |X|$ のとき，$\kappa^* = |\mathit{\Gamma}(X)|$ と書く．κ^* は整列可能基数である.

定義. X を集合とする.

(1) X が有限集合 $:\Longleftrightarrow$ ある自然数 $n \in \mathbf{N}$ と全単射 $X \to n$ が存在する.
(2) X が無限集合 $:\Longleftrightarrow$ X が有限集合でない.

定義. X を集合とする.

(1) X が Dedekind 無限 $:\Longleftrightarrow$ $|Y| = |X|$ となる真部分集合 $Y \subsetneq X$ が存在する.
(2) X が Dedekind 有限 $:\Longleftrightarrow$ X が Dedekind 無限でない.

定義. X を集合とする.

(1) X が I-finite $:\Longleftrightarrow$ 任意の空でない部分集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が極大元をもつ.
(2) X が II-finite $:\Longleftrightarrow$ 任意の空でない全順序部分集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が最大元をもつ.
(3) X が III-finite $:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 有限.
(4) X が IV-finite $:\Longleftrightarrow$ X が Dedekind 有限.

(5) X が V-finite $:\Longleftrightarrow |X| = 0$ または $2 \cdot |X| > |X|$.

(6) X が VI-finite $:\Longleftrightarrow |X| = 0$ または $|X| = 1$ または $|X|^2 > |X|$.

(7) X が VII-finite $:\Longleftrightarrow X$ は整列可能でないまたは $\aleph_0 \not< |X|$.

命題 7. 集合 X に対し，以下は同値である．

(1) X は Dedekind 無限である (X は IV-finite でない).

(2) 全射でない単射 $X \to X$ が存在する．

(3) $\aleph_0 \leq |X|$.

(4) 単射 $\mathbf{N} \to X$ が存在する．

(5) X は可算部分集合をもつ．

(6) $|X| = |X| + \aleph_0$.

(7) $|X| = |X| + 1$.

(8) 集合 Y に対して $|Y| \leq \aleph_0$ ならば $|X| + |Y| = |X|$.

証明． $1 \iff 2, 3 \iff 4, 4 \iff 5$ は明らか．

($2 \implies 4$) $f\colon X \to X$ を全射でない単射とする．全射でないから $x \in X \setminus f(X)$ が取れる．$g\colon \mathbf{N} \to X$ を

$$g(n) = \begin{cases} x & n = 0 \\ f(g(n-1)) & n \neq 0 \end{cases}$$

により定めると，これは単射である．

∵) g が単射でないとする．このとき集合

$$A = \{\, n \in \mathbf{N} \mid \exists m \in \mathbf{N}\, (g(n) = g(m) \land n \neq m) \,\}$$

は空でない．$n_0 = \min A$ とおく．g の定義より $n_0 \neq 0$ である．ある $m \in \mathbf{N}$ が存在して

$$g(n_0) = g(m), \quad n_0 \neq m$$

をみたす．g の定義と f が単射であることから

$$g(n_0 - 1) = g(m - 1)$$

が従うが，これは n_0 の最小性に反する．

(5 $\implies$ 6) $Y \subseteq X$ を可算部分集合とする．$|Y| = |Y| + \aleph_0$ であるから

$$|X| = |(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y| + |Y| = |X \setminus Y| + |Y| + \aleph_0 = |X| + \aleph_0$$

が従う．

(6 $\implies$ 7) $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ であるから

$$|X| = |X| + \aleph_0 = |X| + \aleph_0 + 1 = |X| + 1$$

が従う．

(7 $\implies$ 1) X に属さない要素 p を一つ取る．仮定より全単射 $f\colon X \cup \{ p \} \to X$ が存在する．このとき $f(X) \subsetneq X$ かつ $|f(X)| = |X|$ である．

(6 $\implies$ 8) Y を $|Y| \le \aleph_0$ なる集合とする．仮定より

$$|X| \le |X| + |Y| \le |X| + \aleph_0 = |X|$$

となり，$|X| + |Y| = |X|$ が従う．

(8 $\implies$ 6) 明らか． □

命題 8. X を集合とする．以下は同値である．

(1) $\aleph_0 \le^* |X|$.

(2) $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 無限である (X は III-finite でない).

証明． (1 $\implies$ 2) $f\colon X \to \mathbf{N}$ を全射とする．写像 $g\colon \mathbf{N} \to \mathcal{P}(X)$ を $g(n) = f^{-1}(\{ n \})$ によって定めると，これは単射である．

(2 $\implies$ 1) $f\colon \mathbf{N} \to \mathcal{P}(X)$ を単射とする．X の分割であるような可算集合を構成し，X からその集合への全射が存在することを示す．そのための準備として，$\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合からなる列 $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ と，X の部分集合列 $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を構成する．$\mathcal{A}_0 = f(\mathbf{N})$, $S_0 = \emptyset$ とおく．明らかに $\mathcal{A}_0$ は可算集合である．

※ この証明の中で，$\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合 $\mathcal{A}$ を全単射 $\mathbf{N} \to \mathcal{A}$ から誘導される順序により整列集合とみなす．この順序は $\mathcal{P}(X)$ の包含関係による順序と一致するとは限らないことに注意する．

$\mathcal{A}_n$ を $\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合とする．$\mathcal{B}_n$ を $\mathcal{A}_n$ の要素の有限個の共通部分全体の集合とする．これは可算集合である．

※ 全単射 $\mathbf{N} \to \mathcal{B}_n$ は，$\mathbf{N}$ の整列性と全単射 $\mathbf{N} \to \mathcal{A}_n$ から選択公理を使わずに構成できる．

$\mathcal{B}_n$ において $\forall i \in \mathbf{N}\,(B_i \supsetneq B_{i+1})$ なる集合列 $(B_i)_{i\in\mathbf{N}}$ が存在するとき，$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$，$S_{n+1} = S_n$ とおく．次に，$\mathcal{B}_n$ においてそのような集合列が存在しないときについて考える．このとき，

$$B \neq \emptyset, \quad \forall A \in \mathcal{A}_n\,(B \subseteq A \vee B \cap A = \emptyset)$$

なる $B \in \mathcal{B}_n$ が存在する．

∵)

$$\forall B \in \mathcal{B}_n\,(B \neq \emptyset \implies \exists A \in \mathcal{A}_n\,(B \nsubseteq A \wedge B \cap A \neq \emptyset))$$

と仮定する．集合 $\{\, B \in \mathcal{B}_n \mid B \neq \emptyset \,\}$ は $\mathcal{B}_n$ の空でない部分集合であり，この集合の最小元を B_0 とおく．明らかに $\emptyset \neq B_0 \in \mathcal{B}_n$ である．$\emptyset \neq B_i \in \mathcal{B}_n$ が定義されているとき，B_{i+1} を次のように定義する．仮定より，$\mathcal{A}_n$ の部分集合

$$\{\, A \in \mathcal{A}_n \mid B_i \nsubseteq A \wedge B_i \cap A \neq \emptyset \,\}$$

は空でなく，この集合の最小元を A_i とする．$B_{i+1} = B_i \cap A_i$ とおくと，$\emptyset \neq B_{i+1} \in \mathcal{B}_n$ である．$B_i \nsubseteq A_i$ であるから $B_i \supsetneq B_{i+1}$ となる．$(B_i)_{i\in\mathbf{N}}$ は $\mathcal{B}_n$ の集合列で $\forall i \in \mathbf{N}\,(B_i \supsetneq B_{i+1})$ をみたす．これは $\mathcal{B}_n$ においてこのような集合列が存在しないことに反する．

集合

$$\{\, B \in \mathcal{B}_n \mid B \neq \emptyset \wedge \forall A \in \mathcal{A}\,(B \subseteq A \vee B \cap A = \emptyset) \,\}$$

は $\mathcal{B}_n$ の空でない部分集合であり，この集合の最小元を S_{n+1} とおき，

$$\mathcal{A}_{n+1} = \{\, A \setminus S_{n+1} \mid A \in \mathcal{A}_n \,\}$$

とおく．S_{n+1} は $\mathcal{A}_n$ の要素の有限個の共通部分で空でなく，任意の $A' \in \mathcal{A}_{n+1}$ に対して $S_{n+1} \cap A' = \emptyset$ であるから $\mathcal{A}_n \neq \mathcal{A}_{n+1}$ をみたす．$\mathcal{A}_{n+1}$ は可算集合である．

∵) 写像 $g_n\colon \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_{n+1}$ を $A \mapsto A \setminus S_{n+1}$ により定める．$\mathcal{A}_{n+1}$ の定義から g_n は全射であり，S_{n+1} の取り方から，任意の $A' \in \mathcal{A}_{n+1}$ に対して

$${g_n}^{-1}(\{\, A' \,\}) = \mathcal{A}_n \cap \{\, A', A' \cup S_{n+1} \,\}$$

である．もし $\mathcal{A}_{n+1}$ が有限集合なら，$\mathcal{A}_n = \bigcup_{A' \in \mathcal{A}_{n+1}} {g_n}^{-1}(\{ A' \})$ が有限集合となり矛盾する．したがって $\mathcal{A}_{n+1}$ は無限集合である．写像

$$h_n \colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n, \quad A' \mapsto \begin{cases} A' & A' \in \mathcal{A}_n \\ A' \cup S_{n+1} & A' \notin \mathcal{A}_n \end{cases}$$

が単射であるから $\mathcal{A}_{n+1}$ は可算集合である．

以上により，$\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合からなる列 $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ と，X の部分集合列 $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ を構成できた．

$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1}$ をみたす $n \in \mathbf{N}$ が存在する場合を考える．このとき，$\mathcal{A}_n$ の要素の有限個の共通部分全体の集合 $\mathcal{B}_n$ において $\forall i \in \mathbf{N}\,(B_i \supsetneq B_{i+1})$ なる集合列 $(B_i)_{i \in \mathbf{N}}$ が存在する．X の部分集合列 $(C_i)_{i \in \mathbf{N}}$ を

$$C_0 = X \setminus B_1, \quad C_{i+1} = B_{i+1} \setminus B_{i+2}$$

により定める．集合 $\mathcal{C} = \{ C_i \mid i \in \mathbf{N} \}$ は $\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合であり，X の分割である．$x \in X$ に対し，$x \in C$ なる $C \in \mathcal{C}$ を $[x]$ と書く．写像 $X \to \mathcal{C}$ を $x \mapsto [x]$ により定めると，これは全射である．次に，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $\mathcal{A}_n \neq \mathcal{A}_{n+1}$ となる場合について考える．このとき，集合

$$\mathcal{S} = \{ S_{i+2} \mid i \in \mathbf{N} \} \cup \left\{ X \setminus \bigcup_{i \in \mathbf{N}} S_{i+2} \right\}$$

は $\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合であり，X の分割である．$x \in X$ に対し，$x \in S$ なる $S \in \mathcal{S}$ を $[x]$ と書く．写像 $X \to \mathcal{S}$ を $x \mapsto [x]$ により定めると，これは全射である． □

命題 9. X を集合とする．以下は同値である．

(1) 任意の空でない全順序部分集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ は最小元をもつ．
(2) 任意の空でない全順序部分集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ は最大元をもつ (X は II-finite である)．
(3) $\mathcal{P}(X)$ は全順序無限部分集合をもたない．

証明. $(1 \iff 2)$ $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して $\mathcal{C}^c = \{ C \in \mathcal{P}(X) \mid X \setminus C \in \mathcal{C} \}$ とおく．

$$C \text{ が } \mathcal{C} \text{ の最大元} \iff X \setminus C \text{ が } \mathcal{C}^c \text{ の最小元}$$

であることから従う．

$(2 \implies 3)$ X が II-finite であるとし，$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を全順序無限部分集合とする．X の部分集合列 $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を

$$C_0 = \max \mathcal{C}, \quad C_{n+1} = \max(\mathcal{C} \setminus \{\, C_i \mid i \in n+1 \,\})$$

により定めたとき，集合 $\{\, X \setminus C_n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$ は $\mathcal{P}(X)$ の全順序部分集合だが最大元をもたない．これは X が II-finite であることに反している．

$(3 \implies 1)$ 全順序有限集合は最小元をもつことからわかる． □

命題 10. X を集合とする．以下は同値である．

(1) X は有限集合である．
(2) 任意の空でない部分集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ は極小元をもつ．
(3) 任意の空でない部分集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ は極大元をもつ (X は I-finite である)．
(4) 部分集合族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が 2 条件
  (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
  (ii) $A \in \mathcal{F} \wedge x \in X \implies A \cup \{\, x \,\} \in \mathcal{F}$
  をみたすとき，$X \in \mathcal{F}$ である．

証明． $(1 \implies 2)$ $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ とする．X は有限集合故，その任意の部分集合は有限集合である．$\mathcal{F} \neq \emptyset$ であるから集合

$$M := \{\, n \in \mathbf{N} \mid \exists A \in \mathcal{F}\, (|A| = |n|) \,\}$$

は空でない．$n_0 = \min M$ とおき，$|A| = |n_0|$ となる $A \in \mathcal{F}$ を取る．A は $\mathcal{F}$ の極小元である．

$(2 \iff 3)$ 明らか．

$(3 \implies 4)$ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を

$$\emptyset \in \mathcal{F}, \quad A \in \mathcal{F} \wedge x \in X \implies A \cup \{\, x \,\} \in \mathcal{F}$$

をみたす部分集合族とする．$\mathcal{F} \neq \emptyset$ 故，仮定より $\mathcal{F}$ は極大元 $A_0 \in \mathcal{F}$ をもつ．$x \in X$ とすると，$\mathcal{F}$ の性質より $A_0 \cup \{\, x \,\} \in \mathcal{F}$ であり，A_0 の極大性より $A_0 \cup \{\, x \,\} = A_0$ が従い，$x \in A_0$ となる．故に $A_0 = X$ となる．

$(4 \implies 1)$ X の有限部分集合全体の集合 $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ について考える．これは

$$\emptyset \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X), \quad A \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) \wedge x \in X \implies A \cup \{\, x \,\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$$

をみたす部分集合族であるから $X \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ となる． □

命題 11. Dedekind 無限集合を部分集合としてもつ集合は Dedekind 無限である．(言い換えると，Dedekind 有限集合の部分集合は Dedekind 有限である．)

証明. X を集合，Y を X の Dedekind 無限部分集合とする．Y は Dedekind 無限であるから，Y の真部分集合 W であって $|Y| = |W|$ となるものが存在する．$W \subsetneq Y$ であるから $x_0 \in Y \setminus W$ が取れる．$x_0 \notin (X \setminus Y) \cup W$ であるから $(X \setminus Y) \cup W$ は X の真部分集合である．f を全単射 $W \to Y$ とする．写像 $g\colon (X \setminus Y) \cup W \to X$ を

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in X \setminus Y \\ f(x) & x \in W \end{cases}$$

により定めるとこれは全単射である．したがって X は Dedekind 無限である． □

命題 12. Dedekind 無限集合は無限集合である．

証明. X を Dedekind 無限集合とすると，単射 $f\colon \mathbf{N} \to X$ が存在する．このとき，集合

$$\mathcal{A} = \{\, \{\, f(m) \mid m \geq n \,\} \mid n \in \mathbf{N} \,\}$$

は $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ をみたすが，極小元をもたない．故に X は無限集合である． □

命題 13. 整列可能な無限集合は Dedekind 無限である．

証明. X を整列可能な無限集合とする．写像 $f\colon \mathbf{N} \to X$ を

$$f(0) = \min X, \quad f(n+1) = \min(X \setminus \{\, f(i) \mid i \in n+1 \,\})$$

により定めると，これは単射である． □

系 14. 選択公理 $\Longrightarrow$ 「無限集合は Dedekind 無限である」． □

以下のようにすれば可算選択公理でよいことがわかる．

命題 15. 可算選択公理 $\Longrightarrow$ 「無限集合は Dedekind 無限である」．

証明. X を無限集合とする．$n \in \mathbf{N}$ に対して $X_n = \left\{\, f \in X^{n+1} \;\middle|\; f \text{ は単射} \,\right\}$ とおく．X は無限集合だから $X_n \neq \emptyset$ である．可算選択公理により選択関数 $\phi\colon \mathbf{N} \to \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n$ を得る．$n \in \mathbf{N}$, $k \in n+1$ に対して $x_{n,k} = (\phi(n))(k)$ とおく．集合

$$Y = \{\, x_{n,k} \mid n \in \mathbf{N}, k \in n+1 \,\}$$

は無限集合である．

$\because$) Y が有限集合であると仮定すると，ある $n \in \mathbf{N}$ と全単射 $f\colon Y \to n$ が存在する．Y の定義より，写像 $\phi(n)\colon n+1 \to X$ の終域を Y に制限することができる．合成 $f \circ \phi(n)\colon n+1 \to n$ は単射であるが，これは単射 $n+1 \to n$ が存在しないことに反する．

写像 $s, t\colon Y \to \mathbf{N}$ を次のように定める：$x \in Y$ に対して

$$s(x) = \min \{\, n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in n+1\,(x = x_{n,k}) \,\}, \quad x = x_{s(x),t(x)}.$$

このとき写像

$$h\colon Y \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}, \quad x \mapsto \langle s(x), t(x) \rangle$$

は単射であるから Y は可算集合である． □

命題 16. X を集合とする．以下は同値である．

(1) X は有限集合である．
(2) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ は Dedekind 有限である．

証明. ($1 \implies 2$) X を有限集合とすると，$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ は有限集合である．命題 12 より $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ は Dedekind 有限である．

($2 \implies 1$) X を無限集合とする．写像 $f\colon \mathbf{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ を

$$f(n) = \{\, A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| = |n| \,\}$$

により定めると，これは単射である． □

定義. 命題「任意の集合 X に対して，X が J-finite ならば X は K-finite」を $P(J,K)$ と書く．

命題 17. $J \leq K$ ならば $P(J,K)$ である．

証明. (I-finite $\implies$ II-finite) 明らか．

(II-finite $\implies$ III-finite) X が III-finite でないとする．命題 8 より全射 $f\colon X \to \mathbf{N}$ が存在する．自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対して X の部分集合 A_n を $A_n = \bigcup_{i \in n+1} f^{-1}(\{\, i \,\})$ と定めると，集合 $\{\, A_n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$ は $\mathcal{P}(X)$ の全順序部分集合で最大元をもたない．したがって X は II-finite でない．

(III-finite $\implies$ IV-finite) X が IV-finite でないとすると，単射 $f\colon \mathbf{N} \to X$ が存在す

る．写像 $g\colon X \to \mathcal{P}(X)$ を $x \mapsto \{\, x \,\}$ により定めるとこれは単射である．したがって単射 $g \circ f\colon \mathbf{N} \to \mathcal{P}(X)$ が存在する．故に X は III-finite でない．

(IV-finite $\implies$ V-finite) X が V-finite でないとする．$|X| \neq 0$ かつ $2 \cdot |X| = |X|$ 故 X は Dedekind 無限である．すなわち，X は IV-finite でない．

(V-finite $\implies$ VI-finite) X を V-finite とし，$|X| \neq 0$, $|X| \neq 1$ とする．このとき $|X| < 2 \cdot |X| \leq |X|^2$ であるから X は VI-finite である．

(VI-finite $\implies$ VII-finite) X を VII-finite でない集合とすると，X は整列可能かつ $\aleph_0 \leq |X|$ である．明らかに $|X| \neq 0$ かつ $|X| \neq 1$ である．X は整列可能な無限集合であるから命題 2 より $|X|^2 = |X|$ となる．故に X は VI-finite でない．□

系 18. $J_1 \leq J_0$ かつ $K_0 \leq K_1$ ならば「$P(J_0, K_0) \implies P(J_1, K_1)$」である．□

定理 19. 選択公理 $\implies$ $P(\mathrm{VII}, \mathrm{I})$. □

したがって，選択公理を仮定したとき I-finite から VII-finite までの定義は同値である．

定理 20. 以下は同値である．

(1) 選択公理.
(2) $P(\mathrm{VII}, \mathrm{VI})$: $|X|^2 = |X|$ ならば X は整列可能である．

証明. (1 $\implies$ 2) 明らか.

(2 $\implies$ 1) X を無限集合とする．$\left|X^{\mathbf{N}}\right| > 1$ かつ $\left|X^{\mathbf{N}}\right|^2 = \left|X^{\mathbf{N}}\right|$ である．

$\because$) $\left|X^{\mathbf{N}}\right| > 1$ であることは明らか．写像 $f\colon \mathbf{N} \to X$ に対して写像 f_0, f_1 を

$$\begin{aligned} f_0&\colon \mathbf{N} \to X, \quad n \mapsto f(2n), \\ f_1&\colon \mathbf{N} \to X, \quad n \mapsto f(2n+1) \end{aligned}$$

により定めると，写像

$$g\colon X^{\mathbf{N}} \to X^{\mathbf{N}} \times X^{\mathbf{N}}, \quad f \mapsto \langle f_0, f_1 \rangle$$

は全単射である．

故に $X^{\mathbf{N}}$ は VI-finite でない．仮定より $X^{\mathbf{N}}$ は VII-finite でないから $X^{\mathbf{N}}$ は整列可能かつ $\aleph_0 \leq \left|X^{\mathbf{N}}\right|$ である．写像 g を

$$g\colon X \to X^{\mathbf{N}}, \quad x \mapsto (\mathbf{N} \to X; n \mapsto x)$$

により定めるとこれは単射であるから X は整列可能である． □

系 21. 以下は同値である．

(1) 選択公理
(2) $P(\mathrm{VII}, \mathrm{I})$: 無限集合は整列可能である．
(3) $P(\mathrm{VII}, \mathrm{II})$: 集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ が最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつならば X は整列可能である．
(4) $P(\mathrm{VII}, \mathrm{III})$: $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限ならば X は整列可能である．
(5) $P(\mathrm{VII}, \mathrm{IV})$: Dedekind 無限集合は整列可能である．
(6) $P(\mathrm{VII}, \mathrm{V})$: $2 \cdot |X| = |X|$ ならば X は整列可能である． □

定理 22. 以下は同値である．

(1) 選択公理．
(2) $P(\mathrm{VI}, \mathrm{V})$: 無限集合 X に対して，$2 \cdot |X| = |X|$ ならば $|X|^2 = |X|$．

証明． ($1 \implies 2$) 明らか．

($2 \implies 1$) κ を無限基数，$\lambda = \kappa \cdot \aleph_0 + (\kappa \cdot \aleph_0)^*$ とおく．$\aleph_0$ と $(\kappa \cdot \aleph_0)^*$ は整列可能無限基数であるから

$$2 \cdot (\kappa \cdot \aleph_0) = \kappa \cdot \aleph_0, \quad 2 \cdot (\kappa \cdot \aleph_0)^* = (\kappa \cdot \aleph_0)^*$$

であり，$2 \cdot \lambda = \lambda$ となる．故に仮定より $\lambda^2 = \lambda$ となる．したがって，

$$\begin{aligned}
\kappa \cdot \aleph_0 + (\kappa \cdot \aleph_0)^* &= \bigl(\kappa \cdot \aleph_0 + (\kappa \cdot \aleph_0)^*\bigr)^2 \\
&= (\kappa \cdot \aleph_0)^2 + 2 \cdot (\kappa \cdot \aleph_0) \cdot (\kappa \cdot \aleph_0)^* + \bigl((\kappa \cdot \aleph)^*\bigr)^2 \\
&\geq (\kappa \cdot \aleph_0) \cdot (\kappa \cdot \aleph_0)^*.
\end{aligned}$$

故に命題 4 より $\kappa \cdot \aleph_0 \leq (\kappa \cdot \aleph_0)^*$ または $(\kappa \cdot \aleph_0)^* \leq \kappa \cdot \aleph_0$ となる．$(\kappa \cdot \aleph_0)^* \not\leq \kappa \cdot \aleph_0$ 故 $\kappa \cdot \aleph_0 \leq (\kappa \cdot \aleph_0)^*$ が従い，$\kappa \leq \kappa \cdot \aleph_0$ 故 $\kappa \leq (\kappa \cdot \aleph_0)^*$ が従う．故に κ は整列可能基数である． □

系 23. 以下は同値である．

(1) 選択公理．
(2) $P(\mathrm{VI}, \mathrm{I})$: 無限集合 X に対して $|X|^2 = |X|$．
(3) $P(\mathrm{VI}, \mathrm{II})$: 集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ が最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつならば $|X|^2 = |X|$．

(4) $P(\mathrm{VI},\mathrm{III})$: $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限ならば $|X|^2 = |X|$.

(5) $P(\mathrm{VI},\mathrm{IV})$: X が Dedekind 無限ならば $|X|^2 = |X|$. □

定義. X を集合とする.

(1) X が Ia-finite $:\Longleftrightarrow$ X は 2 つの無限集合の非交和でない.

(2) X が D-finite $:\Longleftrightarrow$ $|X| \leq 1$ または，ある A, B が存在して $|A| < |X|$ かつ $|B| < |X|$ かつ $X = A \cup B$.

命題 24. $P(\mathrm{I},\mathrm{Ia})$: 2 つの無限集合の非交和は無限集合である.

証明. 明らか. □

命題 25. $P(\mathrm{Ia},\mathrm{II})$: 集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ が最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつならば，X は 2 つの無限集合の非交和である.

証明. X を II-finite でない集合とすると，$\mathcal{P}(X)$ は最大元をもたない空でない全順序部分集合 $\mathcal{C}$ をもつ．まず，無限集合 $Y \in \mathcal{C}$ が存在する場合について考える．このとき，集合 $A = (\bigcup \mathcal{C}) \setminus Y$ は無限集合である.

$\because$) A が有限集合であると仮定する．$A = \emptyset$ の場合，Y が $\mathcal{C}$ の最大元となり，$\mathcal{C}$ が最大元をもたないことに反する．$A \neq \emptyset$ の場合について考える．$x \in A$ に対して，集合 $\mathcal{A}_x = \{\, C \in \mathcal{C} \mid x \in C \,\}$ は空でないから選択関数 $f \colon A \to \bigcup_{x \in A} \mathcal{A}_x$ が存在する．集合 $\mathcal{B} = \{\, f(x) \mid x \in A \,\}$ は $\mathcal{P}(X)$ の空でない全順序有限部分集合であるから，これは最大元 B をもつ．ある $x_0 \in A$ が存在して $x_0 \in f(x_0) = B$ であり，A の定義から $x_0 \notin Y$ となる．故に $B \nsubseteq Y$ であり，$\mathcal{C}$ が全順序であることから $Y \subseteq B$ が従う．また，B の最大性から $A \subseteq B$ である.

$$B \subseteq \bigcup \mathcal{C} = Y \cup A \subseteq B$$

故 $B = \bigcup \mathcal{C}$ が従い，B が $\mathcal{C}$ の最大元となるが，これは $\mathcal{C}$ が最大元をもたないことに反する.

$A \subseteq X \setminus Y$ であるから $X \setminus Y$ は無限集合である．$X = (X \setminus Y) \cup Y$ だから X は Ia-finite でない．次に，任意の $Y \in \mathcal{C}$ が有限集合の場合について考える．$n \in \mathbf{N}$ に対して集合 $\mathcal{A}_n = \{\, C \in \mathcal{C} \mid |n| = |C| \,\}$ は空集合または一点集合である.

$\because$) $\mathcal{A}_n \neq \emptyset$ とする．$A, B \in \mathcal{A}_n$ を取る．これらは有限集合であるから Dedekind 有限である．$\mathcal{C}$ は全順序であるから $A \subseteq B$ または $B \subseteq A$ である．$A \subseteq B$ の場合について考える．$A \subsetneq B$ と仮定すると，A は B の真部分集合で $|A| = |B|$ をみたす．故に B は Dedekind 無限集合となるが，これは B が Dedekind 有限であることに反する．したがって $A = B$ となる．同様にして $B \subseteq A$ ならば $A = B$ が従う．

写像 $\mathcal{C} \to \mathbf{N}$ を $C \mapsto |C|$ により定めると，これは単射である．今，任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して

$$A \subseteq B \iff |A| \leq |B|$$

であるから $\mathcal{C}$ は包含関係による順序で整列集合となる．X の部分集合列 $(C_i)_{i\in\mathbf{N}}$ を

$$C_0 = \min \mathcal{C}, \quad C_{i+1} = \min(\mathcal{C} \setminus \{\, C_j \mid j \in i+1 \,\})$$

により定めると，これは $\forall i \in \mathbf{N}\,(C_i \subsetneq C_{i+1})$ をみたす．X の部分集合列 $(D_i)_{i\in\mathbf{N}}$ を

$$D_0 = C_0, \quad D_{i+1} = C_{i+1} \setminus C_i$$

により定め，集合 E, F を

$$E = \left(X \setminus \bigcup_{i\in\mathbf{N}} D_i \right) \cup \bigcup_{i\in\mathbf{N}} D_{2i}, \quad F = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} D_{2i+1}$$

により定めると，E, F は $E \cap F = \emptyset$ なる無限集合であり，$X = E \cup F$ である．故に X は Ia-finite でない． $\square$

系 26. 以下は同値である．

(1) 選択公理.
(2) $P(\mathrm{VII}, \mathrm{Ia})$: 2 つの無限集合の非交和は整列可能である．
(3) $P(\mathrm{VI}, \mathrm{Ia})$: X が 2 つの無限集合の非交和ならば $|X|^2 = |X|$. $\square$

命題 27. $P(\mathrm{IV}, \mathrm{D})$: $|X| > 1$ なる Dedekind 有限集合 X に対して，

$$X = A \cup B, \quad |A| < |X|, \quad |B| < |X|$$

をみたす集合 A, B が存在する．

証明． X を $|X| > 1$ なる Dedekind 有限集合とする．$x \in X$ を一つ取る．X は Dedekind 有限であるから $|X \setminus \{\, x \,\}| < |X|$ である．故に

$$X = (X \setminus \{\, x \,\}) \cup \{\, x \,\}, \quad |X \setminus \{\, x \,\}| < |X|, \quad |\{\, x \,\}| = 1 < |X|$$

と書けるから，X は D-finite である． $\square$

命題 28. $P(\mathrm{D}, \mathrm{VII})$: $\aleph_0 \leq |X|$ をみたす整列可能な集合 X に対して，$X = A \cup B$ ならば $|A| = |X|$ または $|B| = |X|$.

証明. X を VII-finite でない集合とすると，X は整列可能かつ $\aleph_0 \leq |X|$ である．明らかに $|X| \not\leq 1$ である．A, B を集合とし，$X = A \cup B$ をみたしているとする．X が整列可能であるから A, B も整列可能である．A, B の少なくとも一方が空集合なら，$|A| = |X|$ または $|B| = |X|$ である．A, B がともに空でないとする．A, B がともに有限集合なら $X = A \cup B$ も有限集合であり $\aleph_0 \leq |X|$ に反するから，A, B の少なくとも一方は無限集合である．$|A| \leq |B|$ とする．命題 3 より

$$|X| = |A \cup B| \leq |A| + |B| = \max\{\, |A|, |B| \,\} = |B| \leq |X|$$

であるから $|B| = |X|$ が従う．同様にして $|B| \leq |A|$ ならば $|A| = |X|$ が従う．故に X は D-finite でない． $\square$

定理 29. 以下は同値である．

(1) 選択公理.
(2) $P(\mathrm{D}, \mathrm{I})$: 無限集合 X に対して，$X = A \cup B$ ならば $|X| = |A|$ または $|X| = |B|$.

証明. ($1 \implies 2$) 系 21, 命題 28.

($2 \implies 1$) 無限基数 κ, λ に対して $\kappa + \lambda = \kappa$ または $\kappa + \lambda = \lambda$ が成り立つことを示す (命題 5). $\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$, $X \cap Y = \emptyset$ をみたす無限集合 X, Y に対し $X \cup Y$ は無限集合であるから仮定より $|X \cup Y| = |X|$ または $|X \cup Y| = |Y|$ が従う． $\square$

命題 30. $P(\mathrm{V}, \mathrm{IV}) \implies P(\mathrm{IV}, \mathrm{I})$

証明. X を無限集合とする．$|X| + \aleph_0 \geq \aleph_0$ であるから仮定より

$$|X| + \aleph_0 = 2 \cdot (|X| + \aleph_0) = (|X| + \aleph_0) + (|X| + \aleph_0) = 2 \cdot |X| + \aleph_0$$

となる．f を全単射

$$(X \times 1) \cup (\mathbf{N} \times \{\, 1 \,\}) \to (X \times 2) \cup (\mathbf{N} \times \{\, 2 \,\})$$

とし，

$$A_0 = f(X \times 1) \cap (X \times \{\, 0 \,\}), \qquad A_1 = f(X \times 1) \cap (X \times \{\, 1 \,\}),$$
$$B_0 = f(\mathbf{N} \times \{\, 1 \,\}) \cap (X \times \{\, 0 \,\}), \qquad B_1 = f(\mathbf{N} \times \{\, 1 \,\}) \cap (X \times \{\, 1 \,\})$$

とおく．B_0 が無限集合なら，これは可算集合 $f(\mathbf{N} \times \{1\})$ の無限部分集合であるから $|B_0| = \aleph_0$ となり，$|X| \geq \aleph_0$ が従う．B_1 が無限集合の場合も同様にして $|X| \geq \aleph_0$ が従う．B_0 と B_1 が共に有限集合であるとする．$|A_0| + |B_0| = |X|$ であるから A_0 は無限集合であり，同様にして A_1 が無限集合であることがわかる．

$$|X| + 1 = (|A_0| + |B_0|) + 1 \leq |A_0| + |A_1| \leq |X| \leq |X| + 1$$

であるから $|X| + 1 = |X|$ が従う． □

命題 31. 以下は同値である．

(1) $P(\mathrm{V}, \mathrm{I})$: 無限集合 X に対して $2 \cdot |X| = |X|$.
(2) $P(\mathrm{V}, \mathrm{Ia})$: X が 2 つの無限集合の非交和ならば $2 \cdot |X| = |X|$.
(3) $P(\mathrm{V}, \mathrm{II})$: 集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ が最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつならば $2 \cdot |X| = |X|$.
(4) $P(\mathrm{V}, \mathrm{III})$: $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限ならば $2 \cdot |X| = |X|$.
(5) $P(\mathrm{V}, \mathrm{IV})$: X が Dedekind 無限ならば $2 \cdot |X| = |X|$.
(6) 無限集合 X に対して $\aleph_0 \cdot |X| = |X|$.
(7) 無限集合 X に対してある集合 Y が存在して $\aleph_0 \cdot |Y| = |X|$.
(8) 無限集合 X と集合 Y に対して $|Y| \leq |X|$ ならば $|X| + |Y| = |X|$.

証明． $1 \implies 2$, $2 \implies 3$, $3 \implies 4$, $4 \implies 5$ は明らか．

($5 \implies 1$) 命題 30.

($1 \implies 6$) X を無限集合とする．仮定より $2 \cdot |X| = |X|$ であるから単射 f, $g\colon X \to X$ で

$$f(X) \cup g(X) = X, \quad f(X) \cap g(X) = \emptyset$$

をみたすものが存在する．$n \in \mathbf{N}$ に対して写像 $f^{(n)}\colon X \to X$ を

$$f^{(0)} = \mathrm{id}_X, \quad f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}$$

により定め，写像 $h\colon \mathbf{N} \times X \to X$ を $\langle n, x \rangle \mapsto f^{(n)}(g(x))$ により定めると，h は単射である．

∵) $f^{(n)}(g(x)) = f^{(n')}(g(x'))$ とする．$n < n'$ ならば，f が単射であることから $g(x) = f^{(n'-n)}(g(x'))$ が従うが，これは $f(X) \cap g(X) = \emptyset$ に反する．$n' < n$ の場合も同様に矛盾する．したがって $n = n'$ となる．f, g は単射であるから $x = x'$ が従う．

故に $\aleph_0 \cdot |X| \leq |X|$ となる．$|X| \leq \aleph_0 \cdot |X|$ であるから $\aleph_0 \cdot |X| = |X|$ が従う．

(6 $\implies$ 7) 明らか．

(7 $\implies$ 1) X を無限集合，Y を集合，f を全単射 $\mathbf{N} \times Y \to X$ とする．写像 $g\colon \mathbf{N} \times Y \to 2 \times X$ を

$$g(\langle 2n, y\rangle) = \langle 0, f(\langle n, y\rangle)\rangle, \quad g(\langle 2n+1, y\rangle) = \langle 1, f(\langle n, y\rangle)\rangle$$

により定めるとこれは全単射であるから $|X| = \aleph_0 \cdot |Y| = 2 \cdot |X|$ が従う．

(1 $\implies$ 8) X を無限集合，Y を集合，$|Y| \leq |X|$ とする．仮定より

$$|X| \leq |X| + |Y| \leq |X| + |X| = 2 \cdot |X| = |X|$$

となり，$|X| + |Y| = |X|$ が従う．

(8 $\implies$ 1) 明らか． □

命題 32. 以下は同値である．

(1) $P(\mathrm{IV}, \mathrm{I})$: Dedekind 有限集合は有限集合である．
(2) $P(\mathrm{IV}, \mathrm{Ia})$: Dedekind 有限集合は 2 つの無限集合の非交和でない．
(3) $P(\mathrm{IV}, \mathrm{II})$: Dedekind 有限集合 X について，任意の全順序部分 $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ は最大元をもつ．
(4) $P(\mathrm{IV}, \mathrm{III})$: Dedekind 有限集合の冪集合は Dedekind 有限集合である．
(5) Dedekind 有限集合からなる Dedekind 有限集合 X の和集合 $\bigcup X$ は Dedekind 有限集合である．
(6) Dedekind 有限集合の像は Dedekind 有限である．
(7) 任意の集合 X に対して，$\aleph_0 \leq^* |X|$ ならば $\aleph_0 \leq |X|$.
(8) Dedekind 無限集合 X の和集合 $\bigcup X$ は Dedekind 無限である．
(9) 非可算集合 X と可算集合 Y に対して $|X \cup Y| = |X|$.
(10) 非可算集合 X と可算集合 Y に対して $|X \setminus Y| = |X|$.
(11) $|X| > \aleph_0$ かつ $|Y| = \aleph_0$ ならば $|X \setminus Y| > \aleph_0$.
(12) 任意の集合 X に対して $\aleph_0 \leq |X|$ または $|X| \leq \aleph_0$ である．
(13) Dedekind 有限集合 X と Dedekind 無限集合 Y に対して $|X| \leq |Y|$.
(14) 任意の無限集合 X に対して，選択関数 $\mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\} \to Y$ が存在するような無限部分集合 $Y \subseteq X$ が存在する．
(15) 無限集合は可算部分集合をもつ．

証明. 1 $\implies$ 2, 2 $\implies$ 3, 3 $\implies$ 4 は明らか．

($4 \implies 1$) X を Dedekind 有限集合とする．仮定より $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 有限であり，再び仮定より $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ は Dedekind 有限である．命題 16 より X は有限集合である．

($1 \implies 5$) 明らか．

($5 \implies 4$) X を Dedekind 有限集合とし，$\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限であるとする．単射 $f\colon \mathbf{N} \to \mathcal{P}(X)$ で，任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して「$m \neq n$ ならば $f(m) \cap f(n) = \emptyset$」をみたすものが存在する．

$\because$) $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限であるから命題 8 より全射 $g\colon X \to \mathbf{N}$ が存在する．写像

$$h\colon \mathbf{N} \to \mathcal{P}(X), \quad n \mapsto g^{-1}(\{\, n \,\})$$

は任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して「$m \neq n$ ならば $h(m) \cap h(n) = \emptyset$」をみたす単射である．

集合

$$W = \{\, \{\, \{\, n \,\}, \{\, n, x \,\} \,\} \mid n \in \mathbf{N} \wedge x \in f(n) \,\}$$

について考える．集合 $\{\, n \,\}$, $\{\, n, x \,\}$, $\{\, \{\, n \,\}, \{\, n, x \,\} \,\}$ は有限集合であるから Dedekind 有限である．写像

$$p\colon W \to X, \quad \{\, \{\, n \,\}, \{\, n, x \,\} \,\} \mapsto x$$

は単射であり，X が Dedekind 有限であるから W は Dedekind 有限である．仮定より $\bigcup W$ は Dedekind 有限であり，再び仮定より $\bigcup(\bigcup W)$ は Dedekind 有限である．しかし W の定義より $\mathbf{N} \subseteq \bigcup(\bigcup W)$ であるから $\bigcup(\bigcup W)$ は Dedekind 無限となり矛盾する．

($4 \implies 6$) X を Dedekind 有限集合，$f\colon X \to Y$ を全射とする．写像

$$g\colon Y \to \mathcal{P}(X), \quad y \mapsto f^{-1}(\{\, y \,\})$$

は単射である．仮定より $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 有限であるから Y は Dedekind 有限である．

($6 \implies 7$) $f\colon X \to \mathbf{N}$ を全射とする．$\mathbf{N}$ は Dedekind 無限集合であるから X は Dedekind 無限であり，単射 $\mathbf{N} \to X$ が存在する．

($7 \implies 4$) $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限であるとする．命題 8 より $\aleph_0 \leq^* |X|$ が従い，仮定より $\aleph_0 \leq |X|$ となる．故に X は Dedekind 無限である．

($1 \implies 8$) 明らか．

($8 \implies 7$) X を集合，$f\colon X \to \mathbf{N}$ を全射とする．写像

$$g\colon \mathbf{N} \to \mathcal{P}(X), \quad n \mapsto f^{-1}(\{\, n \,\})$$

は単射で，$\mathbf{N}$ が Dedekind 無限であるから $g(\mathbf{N})$ は Dedekind 無限である．仮定より $X = \bigcup g(\mathbf{N})$ は Dedekind 無限である．したがって単射 $\mathbf{N} \to X$ が存在する．

($1 \implies 9$) X を非可算集合，Y を可算集合とする．仮定より X は Dedekind 無限集合である．$|Y \setminus X| \leq \aleph_0$ であるから

$$|X \cup Y| = |X| + |Y \setminus X| = |X|$$

が従う．

($9 \implies 10$) X を非可算集合，Y を可算集合とする．$X \setminus Y$ は非可算集合であるから

$$|X| = |X \cup Y| = |(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y|$$

が従う．

($10 \implies 11$) 明らか．

($11 \implies 1$) X を無限集合とする．X が可算集合なら，これは Dedekind 無限である．X を非可算集合とする．このとき $|(X \times 1) \cup (\mathbf{N} \times \{ 1 \})| > \aleph_0$ であるから仮定より

$$|X| = |((X \times 1) \cup (\mathbf{N} \times \{ 1 \}) \setminus (\mathbf{N} \times \{ 1 \}))| > \aleph_0$$

となり，X が Dedekind 無限であることがわかる．

($1 \iff 12$) 明らか．

($1 \implies 13$) 明らか．

($13 \implies 1$) X を Dedekind 有限集合とする．$\mathbf{N}$ は Dedekind 無限集合であるから，仮定より $|X| \leq \aleph_0$ となる．したがって，X が無限集合であると仮定すると X は可算集合，すなわち Dedekind 無限となり矛盾する．

($1 \implies 14$) X を無限集合とする．仮定より X は Dedekind 無限であるから可算部分集合 Y をもつ．Y は選択関数 $\mathcal{P}(Y) \setminus \{ \emptyset \} \to Y$ をもつ．

($14 \implies 1$) X を無限集合とし, Y を X の無限部分集合で選択関数 $f\colon \mathcal{P}(Y) \setminus \{ \emptyset \} \to Y$ をもつものとする．写像 $g\colon \mathbf{N} \to Y$ を

$$g(n) = \begin{cases} f(Y) & n = 0 \\ f(Y \setminus \{ g(i) \mid i \in n \}) & n \neq 0 \end{cases}$$

によって定めると，これは単射である．

($1 \iff 15$) 明らか． □

命題 33. 以下は同値である．

(1) $P(\mathrm{III}, \mathrm{I})$: 無限集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 無限である．

(2) $P(\mathrm{III}, \mathrm{Ia})$: X が 2 つの無限集合の非交和ならば $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 無限である．

(3) 無限集合 X に対して $\aleph_0 \leq^* |X|$.

証明. ($1 \implies 2$) 明らか.

($2 \implies 1$) X を無限集合とする．仮定より $\mathcal{P}((X \times 1) \cup (X \times \{ 1 \}))$ は Dedekind 無限であり，単射 $f\colon \mathbf{N} \to \mathcal{P}((X \times 1) \cup (X \times \{ 1 \}))$ が存在する．

$$\mathcal{A}_0 = \{ (X \times 1) \cap A \mid A \in f(\mathbf{N}) \}, \quad \mathcal{A}_1 = \{ (X \times \{ 1 \}) \cap A \mid A \in f(\mathbf{N}) \}$$

とおく．$\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ の少なくとも一方は無限集合である．

> $\because$) $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ がともに有限集合であると仮定する．このとき
>
> $$\mathcal{A} = \{ A_0 \cup A_1 \mid A_0 \in \mathcal{A}_0 \wedge A_1 \in \mathcal{A}_1 \}$$
>
> は有限集合であり，$f(\mathbf{N}) \subseteq \mathcal{A}$ 故 $f(\mathbf{N})$ が有限集合となるが，これは $f(\mathbf{N})$ が可算集合であることに反する．

$\mathcal{A}_0$ が無限集合であるとする．写像

$$g_0\colon \mathcal{A}_0 \to \mathbf{N}, \quad A \mapsto \min \{ n \in \mathbf{N} \mid A = f(n) \cap (X \times 1) \}$$

は単射であるから $\mathcal{A}_0$ は可算集合である．したがって $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 無限である．

($1 \iff 3$) 命題 8. $\square$

命題 34. 以下は同値である．

(1) $P(\mathrm{II}, \mathrm{I})$: 無限集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ は最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつ．

(2) $P(\mathrm{II}, \mathrm{Ia})$: X が 2 つの無限集合の非交和ならば $\mathcal{P}(X)$ は最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつ．

証明. ($1 \implies 2$) 明らか.

($2 \implies 1$) X を無限集合とする．$\mathcal{P}(X)$ が全順序無限部分集合をもつことを示す (命題 9)．仮定より，$\mathcal{P}((X \times 1) \cup (X \times \{ 1 \}))$ は全順序無限部分集合 $\mathcal{C}$ をもつ．

$$\mathcal{C}_0 = \{ (X \times 1) \cap C \mid C \in \mathcal{C} \}, \quad \mathcal{C}_1 = \{ (X \times \{ 1 \}) \cap C \mid C \in \mathcal{C} \}$$

とおく．$\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ は全順序である．

∵) $\mathcal{C}_0$ が全順序であることを示す．C_0, $C_0' \in \mathcal{C}_0$ とする．ある C_1, $C_1' \in \mathcal{C}_1$ が存在し，$C_0 \cup C_1$, $C_0' \cup C_1' \in \mathcal{C}$ をみたす．$\mathcal{C}$ は全順序であるから $C_0 \cup C_1 \subseteq C_0' \cup C_1'$ または $C_0' \cup C_1' \subseteq C_0 \cup C_1$ である．$C_0 \cup C_1 \subseteq C_0' \cup C_1'$ の場合，$C_0 \not\subseteq C_0'$ と仮定すると $(X \times 1) \cap (X \times \{ 1 \}) = \emptyset$ に反するから $C_0 \subseteq C_0'$ である．同様にして $C_0' \cup C_1' \subseteq C_0 \cup C_1$ ならば $C_0' \subseteq C_0$ が従う．故に $\mathcal{C}_0$ は全順序である．同様にして $\mathcal{C}_1$ が全順序であることもわかる．

$\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ の少なくとも一方は無限集合である. 故に $\mathcal{P}(X)$ は全順序無限部分集合をもつ. $\square$

参考文献

[1] 田中 尚夫,『公理的集合論』, 培風館, 1982.

[2] Horst Herrlich, *Axiom of Choice*, Springer, 2006.

[3] Paul Howard and Jean E. Rubin, *Consequences of the Axiom of Choice*, American Mathematical Society, 1998.

[4] J. D. Halpern and Paul E. Howard, *Cardinals m such that $2m = m$*, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 487–490.

[5] Paul E. Howard and Mary F. Yorke, *Definitions of Finite*, Fundamenta Mathematicae 133 (1989), 169–177.

[6] alg-d, 壱大整域, URL:`http://alg-d.com/math/`.

[7] Andrés E. Caicedo (`https://math.stackexchange.com/users/462/andr%c3%a9s-e-caicedo`), Given an injection $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(X)$, how can we construct a surjection $X \to \mathbb{N}$?, Mathematics Stack Exchange, URL:`https://math.stackexchange.com/q/139713` (version: 2012-05-02).