Dependent Multiple Choice

@hyutw*

2021 年 8 月 1 日

※ 自然数全体の集合を $\mathbf{N}$ と書く．$0 \in \mathbf{N}$ である．自然数 n に対して，n 未満の自然数全体 $\{0, \ldots, n-1\}$ を n と書く．写像 f の始域を $\mathrm{dom}(f)$ と書く．すなわち，写像 $f\colon X \to Y$ について，$\mathrm{dom}(f) = X$ である．集合 X から集合 Y への写像全体の集合を Y^X と書く.

X を空でない集合，A, B を X の空でない部分集合，R を X 上の二項関係とする.「任意の $a \in A$ に対してある $b \in B$ が存在して $a\,R\,b$ をみたす」を $\mathrm{P}_R(A, B)$ で表す.

定義. 次の命題を Dependent Multiple Choice (DMC) という.

> 空でない集合 X 上の二項関係 R が $\mathrm{P}_R(X, X)$ をみたすとき，X のある非空有限部分集合列 $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ が存在して「任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $\mathrm{P}_R(F_n, F_{n+1})$」をみたす.

命題 1. DMC
$\iff$ 空でない集合 X 上の二項関係 R が $\mathrm{P}_R(X, X)$ をみたすとき，X の任意の非空有限部分集合 F に対して，X のある非空有限部分集合列 $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ が存在して $F_0 = F$ と「任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $\mathrm{P}_R(F_n, F_{n+1})$」をみたす.

すなわち，DMC において空でない有限部分集合 F_0 は任意に選べる.

証明. ($\Longleftarrow$) 明らか.
($\Longrightarrow$) X を空でない集合，R を X 上の二項関係で $\mathrm{P}_R(X, X)$ をみたしているとする. X の空でない有限部分集合全体の集合を $\mathcal{P}$ とおく．$F \in \mathcal{P}$ とする．自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対

* Twitter: `https://twitter.com/hyutw`.

して

$$S(n)=\left\{\, f\in\mathcal{P}^{n+1} \;\middle|\; \mathrm{P}_R(F,f(0)),\ \forall i\in n\,(\mathrm{P}_R(f(i),f(i+1)))\,\right\}$$

とおき，$\mathcal{A}=\bigcup_{n\in\mathbf{N}} S(n)$ とおく．$\mathcal{A}\neq\emptyset$ である．$\mathcal{A}$ 上の二項関係 $\mathcal{T}$ を

$$f\ \mathcal{T}\ g \iff (\mathrm{dom}(f)<\mathrm{dom}(g))\wedge\left(g|_{\mathrm{dom}(f)}=f\right)$$

によって定める．これは $\mathrm{P}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ をみたす．したがって，任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して $\mathrm{P}_{\mathcal{T}}(\mathcal{F}_n,\mathcal{F}_{n+1})$ をみたす $\mathcal{A}$ の非空有限部分集合列 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が存在する．$\mathcal{T}$ の定義から，任意の $n\in\mathbf{N}$ に対してある $f\in\mathcal{F}_n$ が存在し，$n<\mathrm{dom}(f)$ をみたす．

$$F_0=F,\quad F_{n+1}=\bigcup_{f\in\mathcal{F}_n,\ n<\mathrm{dom}(f)} f(n)\quad(n\in\mathbf{N})$$

と定める．任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して F_n は空でない有限集合である．$\emptyset\neq\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{A}$ であるから，ある $f\in\mathcal{F}_0$ が存在して $\mathrm{P}_R(F,f(0))$ をみたす．したがって $\mathrm{P}_R(F_0,F_1)$ となる．$n>0$ のとき，$x\in F_n$ とすると，ある $f\in\mathcal{F}_{n-1}$ が存在して $x\in f(n-1)$ をみたす．$\mathrm{P}_{\mathcal{T}}(\mathcal{F}_{n-1},\mathcal{F}_n)$ であるから $f\ \mathcal{T}\ g$ をみたす $g\in\mathcal{F}_n$ が存在する．$x\in f(n-1)=g(n-1)$ であり，$\mathrm{P}_R(g(n-1),g(n))$ であるから $x\ R\ y$ をみたす $y\in g(n)$ が存在する．したがって，$\mathrm{P}_R(F_n,F_{n+1})$ となる．$\square$