エンド

@hyutw[*]

2022 年 2 月 24 日

目次

1 対角自然変換

定義. C, D を圏，$F, G\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手とする．対角自然変換 $\sigma\colon F \overset{\cdot\cdot}{\to} G$ とは，圏 D の射の族 $\{\sigma_a\colon F(a,a) \to G(a,a)\}_{a \in C}$ であって，C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$
\begin{tikzcd}
 & F(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] & G(a,a) \arrow[dr, "{G(\mathrm{id}_a, f)}"] & \\
F(b,a) \arrow[ur, "{F(f, \mathrm{id}_a)}"] \arrow[dr, "{F(\mathrm{id}_b, f)}"'] & & & G(a,b) \\
 & F(b,b) \arrow[r, "\sigma_b"'] & G(b,b) \arrow[ur, "{G(f, \mathrm{id}_b)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

F から G への対角自然変換全体の集合を $\mathrm{Dinat}(F, G)$ と書く．

$F, G\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手，$\theta\colon F \Rightarrow G$ を自然変換とする．C の射 $f\colon a \to b$ につい

* `https://yuu7269.github.io/notes`.

て次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & F(a,a) \arrow[rr, "\theta_{a,a}"] & & G(a,a) \arrow[dr, "G(\mathrm{id}_a, f)"] & \\
F(b,a) \arrow[ur, "F(f,\mathrm{id}_a)"] \arrow[rr, "\theta_{b,a}"] \arrow[dr, "F(\mathrm{id}_b, f)"'] & & G(b,a) \arrow[ur, "G(f,\mathrm{id}_a)"] \arrow[dr, "G(\mathrm{id}_b, f)"] & & G(a,b) \\
 & F(b,b) \arrow[rr, "\theta_{b,b}"'] & & G(b,b) \arrow[ur, "G(f,\mathrm{id}_b)"'] &
\end{tikzcd}
$$

左上と左下の四角形は θ の自然性から可換であり，また右の四角形も可換である．したがって $a \in C$ に対して $\sigma_a = \theta_{a,a}$ とおくと，これは対角自然変換 $\sigma\colon F \stackrel{..}{\to} G$ を定める．

$F\colon C \to D$ を函手，$P\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to C$ を射影とする．このとき函手 F は合成 $F \circ P\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ として扱うことができる．

$F, G\colon C \to D$ を函手とし，これらを $C^{\mathrm{op}} \times C$ から D への函手とみなしたものをそれぞれ F_0, G_0 とおく．対角自然変換 $\sigma\colon F_0 \stackrel{..}{\to} G_0$ について考える．圏 C の射 $f\colon a \to b$ に対して図式

$$
\begin{tikzcd}
 & F_0(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] & G_0(a,a) \arrow[dr, "G_0(\mathrm{id}_a, f)"] & \\
F_0(b,a) \arrow[ur, "F_0(f,\mathrm{id}_a)"] \arrow[dr, "F_0(\mathrm{id}_b, f)"'] & & & G_0(a,b) \\
 & F_0(b,b) \arrow[r, "\sigma_b"'] & G_0(b,b) \arrow[ur, "G_0(f,\mathrm{id}_b)"'] &
\end{tikzcd}
$$

は可換である．よって F_0, G_0 の定義より図式

$$
\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(b) \arrow[r, "\sigma_b"'] & G(b)
\end{tikzcd}
$$

は可換であり，これは σ が自然変換 $F \Rightarrow G$ であることを表している．

$F\colon C \to D$ を共変函手，$G\colon C \to D$ を反変函手 (つまり共変函手 $G\colon C^{\mathrm{op}} \to D$) とし，これらを $C^{\mathrm{op}} \times C$ から D への函手とみなしたものをそれぞれ F_0, G_0 とおく．σ:

$F_0 \overset{\cdot\cdot}{\to} G_0$ を対角自然変換とする．このとき C の射 $f\colon a \to b$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \\ F(b) \arrow[r, "\sigma_b"'] & G(b) \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd}$$

は可換である．このような対角自然変換は共変函手 F から反変函手 G への自然変換と考えることができる．同様に，反変函手から共変函手への自然変換も考えられる．

例 1. $\mathbf{Vect_R}$ を実数体 $\mathbf{R}$ 上の線型空間の圏，$\mathbf{MVect_R}$ を $\mathbf{R}$ 上の内積空間の圏，$U\colon \mathbf{MVect_R} \to \mathbf{Vect_R}$ を忘却関手，$F\colon (\mathbf{MVect_R})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect_R}$ を「双対空間をとる」函手とする．このとき，内積空間 $\langle V, \langle -, - \rangle\rangle$ に対して写像 $\kappa_{\langle V, \langle -,- \rangle\rangle}\colon V \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect_R}}(V, \mathbf{R})$ を $x \mapsto \langle x, - \rangle$ により定めると，これは対角自然変換 $U \overset{\cdot\cdot}{\to} F$ を定める． □

定義. $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手，$x \in D$ とする．対角函手 Δx から T への対角自然変換を x から T への wedge という．すなわち，D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a\colon x \to T(a,a)\}_{a \in C}$ であって，C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd} & T(a,a) \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_a, f)"] & \\ x \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[dr, "\sigma_b"'] & & T(a,b) \\ & T(b,b) \arrow[ur, "T(f, \mathrm{id}_b)"'] & \end{tikzcd}$$

x から T への wedge を $x \overset{\cdot\cdot}{\to} T$ で表す．x から T への wedge 全体の集合を $\mathrm{Wedge}(x, T)$ と書く．

定義. $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手，$x \in D$ とする．T から対角函手 Δx への対角自然変換を T から x への cowedge という．すなわち，D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a\colon T(a,a) \to x\}_{a \in C}$ であって，C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd} & T(a,a) \arrow[dr, "\sigma_a"] & \\ T(b,a) \arrow[ur, "T(f, \mathrm{id}_a)"] \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_b, f)"'] & & x \\ & T(b,b) \arrow[ur, "\sigma_b"'] & \end{tikzcd}$$

T から x への cowedge を $T \overset{\cdot\cdot}{\to} x$ で表す．T から x への cowedge 全体の集合を $\mathrm{Wedge}(T, x)$ と書く．

例 2. C を圏とする．函手 $\mathrm{Hom}_C(-,-)\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to\mathbf{Set}$ を次のように定める．

- 対象 $\langle a,b\rangle\in C^{\mathrm{op}}\times C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a,b)$.
- $C^{\mathrm{op}}\times C$ の射 $\langle f,g\rangle\colon\langle a,b\rangle\to\langle a',b'\rangle$ に対して

$$\mathrm{Hom}_C(f,g)=g\circ-\circ f\colon\ \mathrm{Hom}_C(a,b)\to\mathrm{Hom}_C(a',b'),\quad h\mapsto g\circ h\circ f.$$

$a\in C$ に対して，一点集合 $1=\{\,*\,\}$ から $\mathrm{Hom}_C(a,a)$ への写像 $\lambda_a\colon 1\to\mathrm{Hom}_C(a,a)$ を $\lambda_a(*)=\mathrm{id}_a$ により定めると，これは wedge $\lambda\colon 1\to\mathrm{Hom}_C(-,-)$ を定める． □

例 3. C を圏とする．$a,b,c\in C$ に対して写像 $\lambda(a,b,c)$ を

$$\lambda(a,b,c)\colon\ \mathrm{Hom}_C(b,c)\times\mathrm{Hom}_C(a,b)\to\mathrm{Hom}_C(a,c),\quad\langle g,f\rangle\mapsto g\circ f$$

と定める．$\lambda(a,b,c)$ は a,c について自然であり，b について対角自然である． □

例 4. $F,G\colon C\to D$ を函手とする．自然変換 $\sigma\colon F\Rightarrow G$ とは D の射の族 $\{\sigma_a\colon F(a)\to G(a)\}_{a\in C}$ であって，C の任意の射 $f\colon a\to b$ に対して次の図式が可換となるもののことであった．

$$\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(b) \arrow[r, "\sigma_b"'] & G(b)
\end{tikzcd}$$

$1=\{\,*\,\}$ を一点集合とする．一般に，集合 A の要素を与えることと写像 $1\to A$ を与えることは同じであるから，これによって自然変換の定義を書き換えると次のようになる．自然変換 $\sigma\colon F\Rightarrow G$ とは D の射の族 $\{\sigma_a\colon 1\to\mathrm{Hom}_D(F(a),G(a))\}_{a\in C}$ であって，C の任意の射 $f\colon a\to b$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_D(F(a),G(a)) \arrow[dr, "G(f)\circ-"] & \\
1 \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[dr, "\sigma_b"'] & & \mathrm{Hom}_D(F(a),G(b)) \\
 & \mathrm{Hom}_D(F(b),G(b)) \arrow[ur, "-\circ F(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

これは σ が 1 から $\mathrm{Hom}_D(F(-),G(-))\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to\mathbf{Set}$ への wedge であることを表している． □

2 つの対角自然変換の合成は対角自然変換とは限らないが，対角自然変換と自然変換の合成は対角自然変換である．

命題 5. $F, F', G, G' \colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手，$\sigma \colon F' \Rightarrow F$, $\tau \colon G \Rightarrow G'$ を自然変換，$\rho \colon F \ddot{\to} G$ を対角自然変換とする．このとき，$a \in C$ に対して合成 $\tau_{a,a} \circ \rho_a \circ \sigma_{a,a}$ は対角自然変換 $F' \ddot{\to} G'$ を定める．

証明. $f \colon a \to b$ を圏 C の射とする．図式

$$\begin{tikzcd}
 & F'(a,a) \arrow[rr, "\sigma_{a,a}"] & & F(a,a) \arrow[rr, "\rho_a"] & & G(a,a) \arrow[rr, "\tau_{a,a}"] \arrow[dr, "G(\mathrm{id}_a, f)"'] & & G'(a,a) \arrow[dr, "G'(\mathrm{id}_a, f)"] & \\
F'(b,a) \arrow[ur, "F'(f, \mathrm{id}_a)"] \arrow[dr, "F'(\mathrm{id}_b, f)"'] \arrow[rr, "\sigma_{b,a}"] & & F(b,a) \arrow[ur, "F(f, \mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, "F(\mathrm{id}_b, f)"] & & & & G(a,b) \arrow[rr, "\tau_{b,a}"] & & G'(a,b) \\
 & F'(b,b) \arrow[rr, "\sigma_{b,b}"'] & & F(b,b) \arrow[rr, "\rho_b"'] & & G(b,b) \arrow[rr, "\tau_{b,b}"'] \arrow[ur, "G(f, \mathrm{id}_b)"] & & G'(b,b) \arrow[ur, "G'(f, \mathrm{id}_b)"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換であることから従う． □

命題 6. $F, G \colon C \to D$, $H \colon C \times C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手とする．$a, b \in C$ に対して，

$$\sigma_{a,b} \colon F(a) \to H(b,b,a), \qquad \tau_{b,a} \colon H(a,b,b) \to G(a)$$

は a について自然，b について対角自然であるとする．このとき $c \in C$ に対して合成 $\tau_{c,c} \circ \sigma_{c,c}$ は自然変換 $F \Rightarrow G$ を定める．

証明. $f \colon a \to b$ を圏 C の射とする．図式

$$\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[rr, "\sigma_{a,a}"] \arrow[dr, "\sigma_{a,b}"] \arrow[dd, "F(f)"'] & & H(a,a,a) \arrow[r, "\tau_{a,a}"] \arrow[d, "H(f, \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a)"'] & G(a) \arrow[dd, "G(f)"] \\
 & H(b,b,a) \arrow[r, "H(\mathrm{id}_b, f, \mathrm{id}_a)"] \arrow[d, "H(\mathrm{id}_b, \mathrm{id}_b, f)"] & H(b,a,a) \arrow[dr, "\tau_{a,b}"'] & \\
F(b) \arrow[r, "\sigma_{b,b}"'] & H(b,b,b) \arrow[rr, "\tau_{b,b}"'] & & G(b)
\end{tikzcd}$$

が可換であることから従う． □

2 エンド

定義. 函手 $T \colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ のエンドとは，次をみたす組 $\langle e, \lambda \rangle$ である．

(1) $e \in D$ は対象である．

(2) $\lambda\colon e \overset{\cdot\cdot}{\to} T$ は wedge である．

(3) $\sigma\colon x \overset{\cdot\cdot}{\to} T$ を wedge とするとき，任意の $a \in C$ に対して $\sigma_a = \lambda_a \circ p$ をみたす射 $p\colon x \to e$ が一意的に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
 & & T(a,a) \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_a, f)"] & \\
x \arrow[r, dashed, "p"] \arrow[urr, bend left, "\sigma_a"] \arrow[drr, bend right, "\sigma_b"'] & e \arrow[ur, "\lambda_a"] \arrow[dr, "\lambda_b"'] & & T(a,b) \\
 & & T(b,b) \arrow[ur, "T(f, \mathrm{id}_b)"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき e を $\int_{a\in C} T(a,a)$ で表す．双対的にコエンド $\int^{a\in C} T(a,a)$ も定義される．

例 7. $F, G\colon C \to D$ を函手とする．このとき

$$\int_{a\in C} \mathrm{Hom}_D(F(a), G(a)) \cong \mathrm{Hom}_{D^C}(F, G).$$

証明． $a \in C$ に対して $\lambda_a\colon \mathrm{Hom}_{D^C}(F, G) \to \mathrm{Hom}_D(F(a), G(a))$ を $\lambda_a(\alpha) = \alpha_a$ により定めると，これは wedge $\lambda\colon \mathrm{Hom}_{D^C}(F, G) \overset{\cdot\cdot}{\to} \mathrm{Hom}_D(F(-), G(-))$ を定める．wedge $\sigma\colon x \overset{\cdot\cdot}{\to} \mathrm{Hom}_D(F(-), G(-))$ を任意にとる．C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して図式

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_D(F(a), G(a)) \arrow[dr, "G(f)\circ -"] & \\
x \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[dr, "\sigma_b"'] & & \mathrm{Hom}_D(F(a), G(b)) \\
 & \mathrm{Hom}_D(F(b), G(b)) \arrow[ur, "-\circ F(f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

は可換であるから，$u \in x$ に対して $\sigma_a(u)\colon F(a) \to G(a)$ は a について自然である．これにより自然変換 $\sigma_-(u)\colon F \Rightarrow G$ を得る．写像 $p\colon x \to \mathrm{Hom}_{D^C}(F, G)$ を $p(u) = \sigma_-(u)$ により定めると，これは任意の $a \in C$ に対して $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ をみたす．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Hom}_D(F(a), G(a)) \arrow[dr, "G(f)\circ -"] & \\
x \arrow[r, "p"] \arrow[urr, bend left, "\sigma_a"] \arrow[drr, bend right, "\sigma_b"'] & \mathrm{Hom}_{D^C}(F, G) \arrow[ur, "\lambda_a"] \arrow[dr, "\lambda_b"'] & & \mathrm{Hom}_D(F(a), G(b)) \\
 & & \mathrm{Hom}_D(F(b), G(b)) \arrow[ur, "-\circ F(f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

任意の $a \in C$ に対して $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ をみたす射 $p\colon x \to \mathrm{Hom}_{D^C}(F, G)$ が与えられたとする．$u \in x$ とする．任意の $a \in C$ に対して $p(u)_a = \lambda_a(p(u)) = \sigma_a(u)$ であるから $p(u) =$

$\sigma_-(u)$ が従う．故に $\langle \mathrm{Hom}_{D^C}(F,G),\lambda\rangle$ はエンドであり，$\int_{a\in C}\mathrm{Hom}_D(F(a),G(a)) \cong \mathrm{Hom}_{D^C}(F,G)$ が従う． □

$F,G\colon C\to D$ を函手とする．自然変換 $F\Rightarrow G$ とは wedge $1 \stackrel{..}{\to} \mathrm{Hom}_D(F(-),G(-))$ のことであった．このことから，先の例は次のように一般化される．

例 8. $T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to \mathbf{Set}$ を函手とする．このとき

$$\int_{a\in C} T(a,a)\cong \mathrm{Wedge}(1,T).$$ □

例 9. $S,T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ を函手とする．函手 $\mathrm{Hom}_D(S(-,-),T(-,-))\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to \mathbf{Set}$ を次のように定める．

- 対象 $\langle a,b\rangle\in C^{\mathrm{op}}\times C$ に対して $\mathrm{Hom}_D(S(b,a),T(a,b))$.
- $C^{\mathrm{op}}\times C$ の射 $\langle f,g\rangle\colon\langle a,b\rangle\to\langle a',b'\rangle$ に対して

$$T(f,g)\circ - \circ S(g,f)\colon\ \mathrm{Hom}_D(S(b,a),T(a,b))\to \mathrm{Hom}_D(S(b',a'),T(a',b')).$$

※ 函手 $\mathrm{Hom}_D(S(-,-),T(-,-))\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to\mathbf{Set}$ は次のような合成で表すことができる．

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{op}}\times C &\xrightarrow{\Delta} (C^{\mathrm{op}}\times C)\times(C^{\mathrm{op}}\times C)\\ &\xrightarrow{\cong} (C^{\mathrm{op}}\times C)^{\mathrm{op}}\times(C^{\mathrm{op}}\times C)\xrightarrow{S^{\mathrm{op}}\times T} D^{\mathrm{op}}\times D\xrightarrow{\mathrm{Hom}_D(-,-)}\mathbf{Set}\end{aligned}$$

ここで，Δ は対角函手である．

このとき，

$$\int_{a\in C}\mathrm{Hom}_D(S(a,a),T(a,a))\cong \mathrm{Dinat}(S,T).$$ □

例 10. R を可換とは限らない単位的環とし，これを一点前加法圏 R_* とみなす．

※ 圏 R_* を次のように定めると，これは前加法圏である．

- $\mathrm{Ob}(R_*)=\{\,*\,\}$.
- $\mathrm{Hom}_{R_*}(*,*)=R$.
- $f,g\in\mathrm{Hom}_{R_*}(*,*)$ に対して合成 $g\circ f$ は積 $g\cdot f$.
- 対象 $*$ の恒等射 id_* は環 R の単位元 1.

逆に，対象 $*$ をもつ一点前加法圏 C が与えられたとき，$\mathrm{Hom}_C(*,*)$ はアーベル群であり，$f, g \in \mathrm{Hom}_C(*,*)$ に対して積 $g \cdot f$ を射の合成 $g \circ f$ により定めることで $\mathrm{Hom}_C(*,*)$ は環になる．

左 R 加群 M とは，アーベル群 M と次をみたす写像 $R \times M \to M; \langle a, x\rangle \mapsto ax$ の組のことであった：任意の $a, b \in R$, 任意の $x, y \in M$ に対して

- $a(x+y) = ax + ay$,
- $(a+b)x = ax + bx$,
- $(ab)x = a(bx)$,
- $1x = x$.

このような写像 $R \times M \to M$ を与えることと，環準同型 $R \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, M)$ を与えることは同じである．ここで，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, M)$ は M から M への群準同型全体の集合を表し，$f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, M)$ に対して和 $f + g$ と積 fg は，$x \in M$ に対して

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(fg)(x) = f(g(x))$$

により定まっている群準同型 $M \to M$ である．したがって，左 R 加群 M は一点前加法圏 R_* からアーベル群の圏 $\mathbf{Ab}$ への加法函手 M_* であって，R_* の対象 $*$ に対してアーベル群 M が対応しているものとみなせる．同様に，右 R 加群 M は加法函手 $M_* \colon R_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ とみなせる．M を右 R 加群, N を左 R 加群とする．函手 $M_*(-) \otimes N_*(-) \colon R_*^{\mathrm{op}} \times R_* \to \mathbf{Ab}$ を次のように定める．

- 対象 $\langle *, * \rangle$ に対して $M_*(*) \otimes N_*(*) = M \otimes_{\mathbf{Z}} N$.
- 射 $\langle a, b\rangle \colon \langle *, *\rangle \to \langle *, *\rangle$ に対して $M_*(a) \otimes N_*(b) \colon M \otimes_{\mathbf{Z}} N \to M \otimes_{\mathbf{Z}} N$.

このとき，函手 $M_*(-) \otimes N_*(-)$ のコエンドは環 R 上のテンソル積 $M \otimes_R N$ である．

$$\int^{* \in R_*} M_*(*) \otimes N_*(*) \cong M \otimes_R N$$

証明． R 双線型写像は $\mathbf{Z}$ 双線型写像であるから，テンソル積 $M \otimes_{\mathbf{Z}} N$ の普遍性より次の図式を可換にする群準同型 $\lambda_* \colon M \otimes_{\mathbf{Z}} N \to M \otimes_R N$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes_R"] \arrow[d, "\otimes_{\mathbf{Z}}"'] & M \otimes_R N \\ M \otimes_{\mathbf{Z}} N \arrow[ur, dashed, "\lambda_*"'] & \end{tikzcd}$$

写像 $\otimes_R\colon M\times N\to M\otimes_R N$ は R 双線型であるから，群準同型 λ_* は任意の $x\in M$, $y\in N$, $a\in R$ に対して

$$\lambda_*(xa\otimes y)=\lambda_*(x\otimes ay)$$

をみたす．つまり，任意の $a\in R$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & M\otimes_{\mathbf{Z}} N \arrow[dr, "\lambda_*"] & \\
M\otimes_{\mathbf{Z}} N \arrow[ur, "M_*(a)\otimes N_*(1)"] \arrow[dr, "M_*(1)\otimes N_*(a)"'] & & M\otimes_R N \\
 & M\otimes_{\mathbf{Z}} N \arrow[ur, "\lambda_*"'] &
\end{tikzcd}$$

故に λ_* は wedge $\lambda\colon M_*(-)\otimes N_*(-)\overset{\cdot\cdot}{\to} M\otimes_R N$ を定める．このとき $\langle M\otimes_R N,\lambda\rangle$ がコエンドとなることを示す．$\sigma\colon M_*(-)\otimes N_*(-)\overset{\cdot\cdot}{\to} A$ を wedge とする．合成 $\sigma_*\circ\otimes_{\mathbf{Z}}\colon M\times N\to A$ は $\mathbf{Z}$ 双線型であり，任意の $a\in R$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & M\otimes_{\mathbf{Z}} N \arrow[dr, "\sigma_*"] & \\
M\otimes_{\mathbf{Z}} N \arrow[ur, "M_*(a)\otimes N_*(1)"] \arrow[dr, "M_*(1)\otimes N_*(a)"'] & & A \\
 & M\otimes_{\mathbf{Z}} N \arrow[ur, "\sigma_*"'] &
\end{tikzcd}$$

は可換であるから，$\sigma_*\circ\otimes_{\mathbf{Z}}$ は R 双線型である．故に，テンソル積 $M\otimes_R N$ の普遍性より次の図式を可換にする群準同型 $h\colon M\otimes_R N\to A$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\otimes_R"] \arrow[d, "\otimes_{\mathbf{Z}}"'] & M\otimes_R N \arrow[d, dashed, "h"] \\
M\otimes_{\mathbf{Z}} N \arrow[ur, "\lambda_*"] \arrow[r, "\sigma_*"'] & A
\end{tikzcd}$$

テンソル積 $M\otimes_{\mathbf{Z}} N$ の普遍性より次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
 & M\otimes_R N \arrow[d, "h"] \\
M\otimes_{\mathbf{Z}} N \arrow[ur, "\lambda_*"] \arrow[r, "\sigma_*"'] & A
\end{tikzcd}$$

テンソル積 $M\otimes_{\mathbf{Z}} N$ の普遍性より，$h\circ\lambda_*=\sigma_*$ をみたす群準同型 $h\colon M\otimes_R N\to A$ は一意的である．故に $\langle M\otimes_R N,\lambda\rangle$ はコエンドであり，$\int^{*\in R_*} M(*)\otimes N(*)\cong M\otimes_R N$ が従う． $\square$

$T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手，$f\colon d \to d'$ を圏 D の射，$\sigma\colon T \xrightarrow{\cdot\cdot} d$ を cowedge とする．このとき $\{f \circ \sigma_a\}_{a \in C}$ は cowedge $T \xrightarrow{\cdot\cdot} d'$ である．次のようにして函手 $\mathrm{Wedge}(T,-)\colon D \to \mathbf{Set}$ を定める．

- 対象 $d \in D$ に対して $\mathrm{Wedge}(T,d)$.
- D の射 $f\colon d \to d'$ に対して

$$\mathrm{Wedge}(T,f)\colon \mathrm{Wedge}(T,d) \to \mathrm{Wedge}(T,d'), \quad \sigma \mapsto \{f \circ \sigma_a\}_{a \in C}.$$

同様にして函手 $\mathrm{Wedge}(-,T)\colon D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が定まる．

函手 $T\colon C \to D$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Cone}(T,-) &= \mathrm{Hom}_{D^C}(T, \Delta(-))\colon D \to \mathbf{Set}, \\ \mathrm{Cone}(-,T) &= \mathrm{Hom}_{D^C}(\Delta(-), T)\colon D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set} \end{aligned}$$

とおく．

函手 $T\colon C \to D$ の極限 $\lim T$ の存在と，函手 $\mathrm{Cone}(-,T)\colon D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が表現可能であることが同値であるように，エンドに対して次が成り立つ．

命題 11. $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手とする．このとき以下は同値である．

(1) 函手 T のエンド $\int_a T(a,a)$ が存在する．

(2) 函手 $\mathrm{Wedge}(-,T)\colon D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は表現可能である． □

3 変数の函手 $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X \to D$ について考える．$x \in X$ を固定することで 2 変数の函手 $T(-,-,x)\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ が得られるから，エンド $\int_a T(a,a,x)$ を考えることができる．任意の $x \in X$ に対してエンド $\int_a T(a,a,x)$ が存在するとき，対応 $X \ni x \mapsto \int_a T(a,a,x) \in D$ を考えることができる．

命題 12. $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X \to D$ を函手とし，任意の $x \in X$ に対してエンド $\left\langle \int_a T(a,a,x), \lambda^x \right\rangle$ が存在すると仮定する．圏 C の射 $f\colon a \to b$ と $x \in X$ に対して $\alpha_x^f = T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_x) \circ \lambda_a^x$ とおく．

$$\begin{tikzcd} & T(a,a,x) \arrow[dr, "{T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_x)}"] & \\ \int_a T(a,a,x) \arrow[ur, "\lambda_a^x"] \arrow[rr, "\alpha_x^f"] \arrow[dr, "\lambda_b^x"'] & & T(a,b,x) \\ & T(b,b,x) \arrow[ur, "{T(f, \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_x)}"'] & \end{tikzcd}$$

このとき以下をみたす函手 $F\colon X \to D$ が一意的に存在する．

(1) $x \in X$ に対して $F(x) = \int_a T(a,a,x)$.
(2) C の射 $f\colon a \to b$ に対して $\alpha^f_x\colon F(x) \to T(a,b,x)$ が自然変換 $\alpha^f\colon F \Rightarrow T(a,b,-)$ を定める.

この F を $\int_a T(a,a,-)$ で表す.

証明. $k\colon x \to y$ を圏 X の射，$f\colon a \to b$ を圏 C の射とし，次の図式の実線部を考える.

$$\begin{tikzcd}
 & \int_a T(a,a,y) \arrow[rr, "\lambda^y_a"] \arrow[dd, "\lambda^y_b"] & & T(a,a,y) \arrow[dd, "{T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_y)}"] \\
\int_a T(a,a,x) \arrow[ur, dashed, "F(k)"] \arrow[rr, "\lambda^x_a"] \arrow[dd, "\lambda^x_b"'] & & T(a,a,x) \arrow[ur, "{T(\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a, k)}"] \arrow[dd, "{T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_x)}"] & \\
 & T(b,b,y) \arrow[rr, "{T(f, \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_y)}"'] & & T(a,b,y) \\
T(b,b,x) \arrow[ur, "{T(\mathrm{id}_b, \mathrm{id}_b, k)}"] \arrow[rr, "{T(f, \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_x)}"'] & & T(a,b,x) \arrow[ur, "{T(\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_b, k)}"] &
\end{tikzcd}$$

実線部の各四角形はすべて可換であるから，エンド $\int_a T(a,a,y)$ の普遍性より点線の射 $F(k)\colon \int_a T(a,a,x) \to \int_a T(a,a,y)$ を得る．このとき明らかに F は函手 $X \to D$ である．また明らかに $\alpha^f_x\colon F(x) \to T(a,b,x)$ は x について自然である．エンドの普遍性より，このような函手 F は一意的である． $\square$

4 変数の函手 $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \to D$ について考える．圏 C についてエンドをとることで函手 $\int_{a \in C} T(a,a,-,-)\colon X^{\mathrm{op}} \times X \to D$ を得ることができ，さらにこれのエンド

$$\int_{x \in X} \int_{a \in C} T(a,a,x,x)$$

を考えることができる．一方で，同型 $C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \cong (C \times X)^{\mathrm{op}} \times (C \times X)$ により $T\colon (C \times X)^{\mathrm{op}} \times (C \times X) \to D$ とみなすことで，エンド

$$\int_{\langle a,x \rangle \in C \times X} T(a,a,x,x)$$

も考えることができる.

定理 13. $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \to D$ を函手とし，任意の $x, y \in X$ に対してエンド $\left\langle \int_{a \in C} T(a,a,x,y), \lambda^{x,y} \right\rangle$ が存在すると仮定する．函手 $\int_a T(a,a,-,-)\colon X^{\mathrm{op}} \times X \to D$

を F とおく．このとき $d \in D$ について自然な同型

$$\mathrm{Wedge}(d, T) \cong \mathrm{Wedge}(d, F)$$

が存在する．

証明． $f\colon a \to b$ を圏 C の射，$k\colon x \to y$ を圏 X の射とする．函手 $F\colon X^{\mathrm{op}} \times X \to D$ の定義や wedge の定義より，次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & & & & T(b,b,y,y) \arrow[ddd, "{T(f,\mathrm{id}_b,\mathrm{id}_y,\mathrm{id}_y)}"] \\
 & & & F(y,y) \arrow[ur, "\lambda_b^{y,y}"] \arrow[dl, "{F(k,\mathrm{id}_y)}"'] \arrow[d, "\lambda_a^{y,y}"] & \\
 & & F(x,y) \arrow[dr, "\lambda_a^{x,y}"'] & T(a,a,y,y) \arrow[d, "{T(\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_a,k,\mathrm{id}_y)}"'] \arrow[dr, "{T(\mathrm{id}_a,f,\mathrm{id}_y,\mathrm{id}_y)}"] & \\
 & F(x,x) \arrow[ur, "{F(\mathrm{id}_x,k)}"] \arrow[dl, "\lambda_a^{x,x}"'] & & T(a,a,x,y) \arrow[dr, "{T(\mathrm{id}_a,f,\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_y)}"'] & T(a,b,y,y) \arrow[d, "{T(\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_b,k,\mathrm{id}_y)}"] \\
T(a,a,x,x) \arrow[urrr, "{T(\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_x,k)}"] \arrow[rr, "{T(\mathrm{id}_a,f,\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_x)}"'] & & T(a,b,x,x) \arrow[rr, "{T(\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_b,\mathrm{id}_x,k)}"'] & & T(a,b,x,y)
\end{tikzcd}$$

$\sigma\colon d \mathrel{\ddot{\to}} F$ を wedge とする．$\langle a, x\rangle \in C \times X$ に対して $\phi_d(\sigma)_{\langle a,x\rangle} = \lambda_a^{x,x} \circ \sigma_x$ と定める．$C \times X$ の任意の射 $\langle f, k\rangle\colon \langle a, x\rangle \to \langle b, y\rangle$ に対して次の図式が可換であるから $\phi_d(\sigma)_{\langle a,x\rangle}$ は wedge $\phi_d(\sigma)\colon d \mathrel{\ddot{\to}} T$ を定める．

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[rrrr, "\phi_d(\sigma)_{\langle b,y\rangle}"] \arrow[drrr, "\sigma_y"'] \arrow[dddr, "\sigma_x"] \arrow[dddd, "\phi_d(\sigma)_{\langle a,x\rangle}"'] & & & & T(b,b,y,y) \arrow[ddd] \\
 & & & F(y,y) \arrow[ur, "\lambda_b^{y,y}"'] \arrow[dl, "{F(k,\mathrm{id}_y)}"'] \arrow[d] & \\
 & & F(x,y) \arrow[dr] & T(a,a,y,y) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & F(x,x) \arrow[ur, "{F(\mathrm{id}_x,k)}"] \arrow[dl, "\lambda_a^{x,x}"'] & & T(a,a,x,y) \arrow[dr] & T(a,b,y,y) \arrow[d] \\
T(a,a,x,x) \arrow[urrr] \arrow[rr] & & T(a,b,x,x) \arrow[rr] & & T(a,b,x,y)
\end{tikzcd}$$

明らかに，写像 $\phi_d\colon \mathrm{Wedge}(d,F) \to \mathrm{Wedge}(d,T)$ は $d \in D$ について自然である．

$\tau\colon d \mathrel{\ddot{\to}} T$ を wedge とする．$x \in X$ を固定することで wedge $\tau_{\langle -,x\rangle}\colon d \to T(-,-,x,x)$ を得る．したがって，エンド $F(x,x) = \int_a T(a,a,x,x)$ の普遍性から任意の $a \in C$ に対して次の図式を可換にする射 $\psi_d(\tau)_x\colon d \to F(x,x)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, dashed, "\psi_d(\tau)_x"] \arrow[dr, "\tau_{\langle a,x\rangle}"'] & F(x,x) \arrow[d, "\lambda_a^{x,x}"] \\
& T(a,a,x,x)
\end{tikzcd}$$

$k\colon x \to y$ を圏 X の射とする．圏 C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
& & T(a,a,x,x) \arrow[dr, "{T(\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_x,k)}"] & & \\
& F(x,x) \arrow[ur, "\lambda_a^{x,x}"] \arrow[dr, "{F(\mathrm{id}_x,k)}"] & & T(a,a,x,y) \arrow[dr, "{T(\mathrm{id}_a,f,\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_y)}"] & \\
d \arrow[ur, "\psi_d(\tau)_x"'] \arrow[dr, "\psi_d(\tau)_y"] \arrow[uurr, bend left, "\tau_{\langle a,x\rangle}"] \arrow[ddrr, bend right, "\tau_{\langle b,y\rangle}"'] & & F(x,y) \arrow[ur, "\lambda_a^{x,y}"'] \arrow[dr, "\lambda_b^{x,y}"] & & T(a,b,x,y) \\
& F(y,y) \arrow[ur, "{F(k,\mathrm{id}_x)}"'] \arrow[dr, "\lambda_b^{y,y}"'] & & T(b,b,x,y) \arrow[ur, "{T(f,\mathrm{id}_b,\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_y)}"'] & \\
& & T(b,b,y,y) \arrow[ur, "{T(\mathrm{id}_b,\mathrm{id}_b,k,\mathrm{id}_y)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

は可換であるから，エンド $F(x,y) = \int_a T(a,a,x,y)$ の普遍性より次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
& F(x,x) \arrow[dr, "{F(\mathrm{id}_x,k)}"] & \\
d \arrow[ur, "\psi_d(\tau)_x"] \arrow[dr, "\psi_d(\tau)_y"'] & & F(x,y) \\
& F(y,y) \arrow[ur, "{F(k,\mathrm{id}_x)}"'] &
\end{tikzcd}$$

故に $\psi_d(\tau)_x$ は wedge $\psi_d(\tau)\colon d \mathrel{\ddot{\to}} F$ を定める．

$\sigma\colon d \mathrel{\ddot{\to}} F$ を wedge, $x \in X$ とする．任意の $a \in C$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "\psi_d(\phi_d(\sigma))_x"] \arrow[d, "\sigma_x"'] \arrow[dr, "\phi_d(\sigma)_{\langle a,x\rangle}"] & F(x,x) \arrow[d, "\lambda_a^{x,x}"] \\
F(x,x) \arrow[r, "\lambda_a^{x,x}"'] & T(a,a,x,x)
\end{tikzcd}$$

は可換であるから，エンド $F(x,x)=\int_a T(a,a,x,x)$ の普遍性より $\psi_d(\phi_d(\sigma))_x=\sigma_x$ が従う．故に $\psi_d(\phi_d(\sigma))=\sigma$ であり，$\psi_d\circ\phi_d=\mathrm{id}$ が従う．wedge $\tau\colon d\ddot{\to} T$ と $\langle a,x\rangle\in C\times X$ に対して

$$\phi_d(\psi_d(\tau))_{\langle a,x\rangle}=\lambda_a^{x,x}\circ\psi_d(\tau)_x=\tau_{\langle a,x\rangle}$$

であるから $\phi_d\circ\psi_d=\mathrm{id}$ が従う．故に ϕ_d,ψ_d は互いに逆写像である． □

故に，函手 $\mathrm{Wedge}(-,T),\mathrm{Wedge}(-,F)\colon D^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$ の一方が表現可能ならばもう一方も表現可能であり，

$$\int_{\langle a,x\rangle\in C\times X}T(a,a,x,x)\cong\int_{x\in X}F(x,x)=\int_{x\in X}\left(\int_{a\in C}T(a,a,x,x)\right)$$

が従う．

系 14 (Fubini の定理)**.** $T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\times X^{\mathrm{op}}\times X\to D$ を函手とする．任意の $x,y\in X$ に対してエンド $\int_{a\in C}T(a,a,x,y)$ が存在し，任意の $a,b\in C$ に対してエンド $\int_{x\in X}T(a,b,x,x)$ が存在すると仮定する．このとき

$$\int_{x\in X}\left(\int_{a\in C}T(a,a,x,x)\right)\cong\int_{a\in C}\left(\int_{x\in X}T(a,a,x,x)\right).$$ □

エンドは以下のように極限で表すことができる．

C を圏とする．圏 $C_\#$ を次のように定める[*1]．

- 対象は C の射である．
- $f\colon a\to b$ から $f'\colon a'\to b'$ への射は C の射の組 $\langle h,k\rangle$ で次の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[d, "k"] \\ a' \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f'"'] & b' \end{tikzcd}$$

- 射 $\langle h,k\rangle\colon f\to f',\langle h',k'\rangle\colon f'\to f''$ に対して合成は

$$\langle h',k'\rangle\circ\langle h,k\rangle:=\langle h\circ h',k'\circ k\rangle\colon f\to f''$$

である．

*1 圏 $C_\#$ を twisted arrow category と呼ぶ．これは函手 $\mathrm{Hom}_C(-,-)\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to\mathbf{Set}$ の category of elements である．

- $f\colon a \to b$ の恒等射は $\langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_b \rangle\colon f \to f$ である．

圏 $C_{\#}$ の任意の射 $\langle h, k\rangle\colon f \to f'$ は次のように分解する．

$$\begin{tikzcd}
 & f \circ h \arrow[dr, "\langle \mathrm{id}, k\rangle"] & \\
f \arrow[ur, "\langle h, \mathrm{id}\rangle"] \arrow[rr, "\langle h, k\rangle"] \arrow[dr, "\langle \mathrm{id}, k\rangle"'] & & f' \\
 & k \circ f \arrow[ur, "\langle h, \mathrm{id}\rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

函手 $U\colon C_{\#} \to C^{\mathrm{op}} \times C$ を次のように定める．

- 対象 $f \in C_{\#}$ に対して $U(f) = \langle \mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f)\rangle$.
- $C_{\#}$ の射 $\langle h, k\rangle\colon f \to f'$ に対して $U(h, k) = \langle h, k\rangle$.

命題 15. $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手とする．このとき，$d \in D$ について自然な同型

$$\mathrm{Wedge}(d, T) \cong \mathrm{Cone}(d, T \circ U)$$

が存在する．

証明． $\sigma\colon d \overset{..}{\to} T$ を wedge とする．$f \in C_{\#}$ に対して $\phi(\sigma)_f = T\big(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}, f\big) \circ \sigma_{\mathrm{dom}(f)}$ と定める．$C_{\#}$ の任意の射 $\langle h, k\rangle\colon (f\colon a \to b) \to (f'\colon a' \to b')$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
 & T(a, a) \arrow[r, "T(\mathrm{id}_a, f)"] & T(U(f)) \arrow[d, "T(U(h, \mathrm{id}_b))"] \arrow[dd, bend left=60, "T(U(h, k))"] \\
d \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[r, "\sigma_b"] \arrow[dr, "\sigma_{a'}"'] \arrow[urr, bend left=40, "\phi(\sigma)_f"] \arrow[drr, bend right=40, "\phi(\sigma)_{f'}"'] & T(b, b) \arrow[ur, "T(f, \mathrm{id}_a)"] \arrow[r, "T(h \circ f, \mathrm{id}_b)"] & T(U(f \circ h)) \arrow[d, "T(U(\mathrm{id}_{a'}, k))"] \\
 & T(a', a',) \arrow[ur, "T(\mathrm{id}_{a'}, f \circ h)"] \arrow[r, "T\left(\mathrm{id}_{a'}, f'\right)"'] & T(U(f'))
\end{tikzcd}$$

は可換であるから $\phi(\sigma)_f$ は自然変換 $\phi(\sigma)\colon \Delta d \Rightarrow T \circ U$ を定める．明らかに写像 $\phi\colon \mathrm{Wedge}(d, T) \to \mathrm{Cone}(d, T \circ U)$ は $d \in D$ について自然である．$\theta\colon \Delta d \Rightarrow T \circ U$ を自然変

換とする．$a \in C$ に対して $\psi(\theta)_a = \theta_{\mathrm{id}_a}$ と定める．C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} & T(a,a) \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_a, f)"] & \\ d \arrow[ur, "\psi(\theta)_a = \theta_{\mathrm{id}_a}"] \arrow[rr, "\theta_f"] \arrow[dr, "\psi(\theta)_b = \theta_{\mathrm{id}_b}"'] & & T(a,b) \\ & T(b,b) \arrow[ur, "T(f, \mathrm{id}_b)"'] & \end{tikzcd}$$

は可換であるから $\psi(\theta)_a$ は wedge $\psi(\theta)\colon d \ddot{\to} T$ を定める．

任意の wedge $\sigma\colon d \ddot{\to} T$ と $a \in C$ に対して

$$\psi(\phi(\sigma))_a = \phi(\sigma)_{\mathrm{id}_a} = T(\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a) \circ \sigma_a = \sigma_a$$

であるから $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ が従う．任意の自然変換 $\theta\colon \Delta d \Rightarrow T \circ U$ と $C_\#$ の対象 $f\colon a \to b$ に対して

$$\phi(\psi(\theta))_f = T(\mathrm{id}_a, f) \circ \psi(\theta)_a = T(\mathrm{id}_a, f) \circ \theta_{\mathrm{id}_a} = \theta_f$$

であるから $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ が従う．したがって，ϕ, ψ は互いに逆写像である． □

故に，函手 $\mathrm{Wedge}(-, T), \mathrm{Cone}(-, T \circ U)\colon D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ の一方が表現可能ならばもう一方も表現可能であり，

$$\int_a T(a,a) \cong \lim(T \circ U)$$

が従う．

積の存在を仮定すると，エンドは次のように equalizer で表すことができる．

命題 16. $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手とし，圏 D において，積

$$\left\langle \prod_{a \in \mathrm{Ob}(C)} T(a,a), p \right\rangle, \quad \left\langle \prod_{f \in \mathrm{Mor}(C)} T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f)), p' \right\rangle$$

が存在すると仮定する．積 $\prod_f T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f))$ の普遍性より，圏 C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して次の図式を可換にする射 $s, t\colon \prod_a T(a,a) \to \prod_f T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f))$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} T(a,a) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_a, f)"'] & \prod_a T(a,a) \arrow[l, "p_a"'] \arrow[d, dashed, "s"] \\ T(a,b) & \prod_f T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f)) \arrow[l, "p'_f"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(b,b) \arrow[d, "T(f, \mathrm{id}_b)"'] & \prod_a T(a,a) \arrow[l, "p_b"'] \arrow[d, dashed, "t"] \\ T(a,b) & \prod_f T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f)) \arrow[l, "p'_f"] \end{tikzcd}$$

このとき以下は同値である．

(1) 函手 $T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ のエンドが存在する．

(2) 射 $s,t\colon \prod_a T(a,a)\to\prod_f T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f))$ の equalizer が存在する．

証明． ($1\implies 2$) $\langle\int_a T(a,a),\lambda\rangle$ を $T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ のエンドとする．積 $\prod_a T(a,a)$ の普遍性より，任意の $a\in C$ に対して次の図式を可換にする射 $r\colon \int_a T(a,a)\to\prod_a T(a,a)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & T(a,a) \\
\int_a T(a,a) \arrow[ur, "\lambda_a"] \arrow[r, dashed, "r"'] & \prod_a T(a,a) \arrow[u, "p_a"']
\end{tikzcd}$$

$\langle\int_a T(a,a),r\rangle$ が射 $s,t\colon \prod_a T(a,a)\to\prod_f T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f))$ の equalizer であることを示す．$\lambda\colon \int_a T(a,a)\xrightarrow{..}T$ が wedge であることと射 r,s,t のとり方から，C の任意の射 $f\colon a\to b$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
 & T(a,a) \arrow[rr, "T(\mathrm{id}_a,f)"] & & T(a,b) \\
\int_a T(a,a) \arrow[ur, "\lambda_a"] \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "\lambda_b"'] & \prod_a T(a,a) \arrow[u, "p_a"'] \arrow[d, "p_b"] \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & \prod_f T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f)) \arrow[r, "p'_f"] & T(a,b) \\
 & T(b,b) \arrow[rr, "T(f,\mathrm{id}_b)"'] & & T(a,b)
\end{tikzcd}$$

故に，積 $\prod_f T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f))$ の普遍性より $s\circ r=t\circ r$ が従う．$q\colon x\to\prod_a T(a,a)$ を $s\circ q=t\circ q$ をみたす射とする．このとき C の任意の射 $f\colon a\to b$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
 & T(a,a) \arrow[rr, "T(\mathrm{id}_a,f)"] & & T(a,b) \\
x \arrow[ur, "p_a\circ q"] \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p_b\circ q"'] & \prod_a T(a,a) \arrow[u, "p_a"'] \arrow[d, "p_b"] \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & \prod_f T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f)) \arrow[r, "p'_f"] & T(a,b) \\
 & T(b,b) \arrow[rr, "T(f,\mathrm{id}_b)"'] & & T(a,b)
\end{tikzcd}$$

は可換であるから $p_a\circ q$ は wedge $x\xrightarrow{..}T$ を定める．エンド $\int_a T(a,a)$ の普遍性より，任

意の $a \in C$ に対して次の図式を可換にする射 $h\colon x \to \int_a T(a,a)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "q"] \arrow[d, dashed, "h"'] & \prod\limits_a T(a,a) \arrow[d, "p_a"] \\ \int_a T(a,a) \arrow[ru, "r"'] \arrow[r, "\lambda_a"'] & T(a,a) \end{tikzcd}$$

積 $\prod\limits_a T(a,a)$ の普遍性より次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "q"] \arrow[d, "h"'] & \prod\limits_a T(a,a) \\ \int_a T(a,a) \arrow[ru, "r"'] & \end{tikzcd}$$

エンド $\int_a T(a,a)$ の普遍性より，$r \circ h = q$ をみたす射 $h\colon x \to \int_a T(a,a)$ は一意的である．故に $\left\langle \int_a T(a,a), r \right\rangle$ は射 $s,t\colon \prod\limits_a T(a,a) \to \prod\limits_f T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f))$ の equalizer である．

(2 $\implies$ 1) 対象 $e \in D$ と C の射 $l\colon e \to \prod\limits_a T(a,a)$ の組 $\langle e, l \rangle$ を，射 $s,t\colon \prod\limits_a T(a,a) \to \prod\limits_f T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f))$ の equalizer とする．$a \in C$ に対して $\lambda_a = p_a \circ l$ とおく．C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} & T(a,a) \arrow[rrr, "T(\mathrm{id}_a, f)"] & & & T(a,b) \\ e \arrow[ru, "\lambda_a"] \arrow[r, "l"] \arrow[rd, "\lambda_b"'] & \prod\limits_a T(a,a) \arrow[u, "p_a"'] \arrow[d, "p_b"] \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & \prod\limits_f T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f)) \arrow[rr, "p'_f"] & & T(a,b) \\ & T(b,b) \arrow[rrr, "T(f, \mathrm{id}_b)"'] & & & T(a,b) \end{tikzcd}$$

は可換であるから λ_a は wedge $\lambda\colon e \ddot{\to} T$ を定める．$\langle e, \lambda \rangle$ が函手 T のエンドとなることを示す．$\sigma\colon x \ddot{\to} T$ を wedge とする．積 $\prod\limits_a T(a,a)$ の普遍性より，任意の $a \in C$ に対して次の図式を可換にする射 $q\colon x \to \prod\limits_a T(a,a)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} & T(a,a) \\ x \arrow[ru, "\sigma_a"] \arrow[r, dashed, "q"'] & \prod\limits_a T(a,a) \arrow[u, "p_a"'] \end{tikzcd}$$

C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
 & T(a,a) \arrow[rr, "T(\mathrm{id}_a, f)"] & & \\
x \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\sigma_b"'] & \prod_a T(a,a) \arrow[u, "p_a"'] \arrow[d, "p_b"] \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & \prod_f T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f)) \arrow[r, "p'_f"] & T(a,b) \\
 & T(b,b) \arrow[rr, "T(f, \mathrm{id}_b)"'] & &
\end{tikzcd}$$

は可換であるから，積 $\prod_f T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f))$ の普遍性より $s \circ q = t \circ q$ が従う．故に，equalizer e の普遍性より次の図式を可換にする射 $h\colon x \to e$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, dashed, "h"'] & \\
 & \prod_a T(a,a) \\
e \arrow[ur, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

したがって，任意の $a \in C$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "q"] \arrow[d, "h"'] \arrow[rr, bend left, "\sigma_a"] & & \\
e \arrow[r, "l"'] \arrow[rr, bend right, "\lambda_a"'] & \prod_a T(a,a) \arrow[r, "p_a"] & T(a,a)
\end{tikzcd}$$

このような射 h の一意性について示そう．射 $h, h'\colon x \to e$ が任意の $a \in C$ に対して次の図式を可換にするとする．

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "{h, h'}"'] & T(a,a) \\
e \arrow[ur, "\lambda_a"] \arrow[r, "l"'] & \prod_a T(a,a) \arrow[u, "p_a"']
\end{tikzcd}$$

積 $\prod_a T(a,a)$ の普遍性より $l \circ h = l \circ h'$ が従い，equalizer e の普遍性より $h = h'$ が従う．故に $\langle e, \lambda \rangle$ は函手 T のエンドである． □

故に以下が成り立つ．

定理 17. C を小圏，D を完備な圏とする．このとき，函手 $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ のエンド $\int_a T(a,a) \in D$ が存在する． □

定理 18. 連続な函手はエンドを保つ．すなわち，$F\colon D \to X$ を連続函手とし，函手 $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ のエンド $\int_a T(a,a)$ が存在するとき，

$$F\left(\int_a T(a,a)\right) \cong \int_a F(T(a,a)).$$ □

系 19. 函手 $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ のエンド $\int_a T(a,a)$ が存在するとき，

$$\mathrm{Hom}_D\left(d, \int_c T(c,c)\right) \cong \int_c \mathrm{Hom}_D(d, T(c,c)).$$ □

D^{op} で考えれば

$$\mathrm{Hom}_D\left(\int^c T(a,a), d\right) \cong \int_c \mathrm{Hom}_D(T(c,c), d)$$

もわかる．

エンドは極限で表すことができた．逆に，極限はエンドで表すことができる．

命題 20. $T\colon C \to D$ を函手とし，T を函手 $C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ とみなしたものを T_0 とおく．このとき以下は同値である．

(1) 函手 $T\colon C \to D$ の極限が存在する．
(2) 函手 $T_0\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ のエンドが存在する． □

定義. C を圏，$a \in C$, $x \in \mathbf{Set}$ とする．

(1) 函手 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(a,-))\colon C \to \mathbf{Set}$ が表現可能なとき，これを表現する対象を copower object といい，$x \odot a$ で表す．

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(a,-)) \cong \mathrm{Hom}_C(x \odot a, -)$$

(2) 函手 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(-,a))\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が表現可能なとき，これを表現する対象を power object といい，$x \pitchfork a$ で表す．

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(-,a)) \cong \mathrm{Hom}_C(-, x \pitchfork a)$$

C を圏，$a \in C$, $x \in \mathbf{Set}$ とする．$\coprod_{i\in x} a$, $\prod_{i\in x} a$ が存在するとき，$b \in C$ について自然に

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(a,b)) &\cong \prod_{i\in x} \mathrm{Hom}_C(a,b) \cong \mathrm{Hom}_C\left(\coprod_{i\in x} a, b\right) \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(b,a)) &\cong \prod_{i\in x} \mathrm{Hom}_C(b,a) \cong \mathrm{Hom}_C\left(b, \prod_{i\in x} a\right)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
x \odot a \cong \coprod_{i\in x} a, \quad x \pitchfork a \cong \prod_{i\in x} a
$$

が従う．

C を圏，$a \in C$ とする．任意の $x \in \mathbf{Set}$ に対して $x \odot a$, $x \pitchfork a$ が存在するとき，随伴

$$
\begin{aligned}
- \odot a &\dashv \mathrm{Hom}_C(a, -) \colon \mathbf{Set} \to C \\
- \pitchfork a &\dashv \mathrm{Hom}_C(-, a) \colon \mathbf{Set} \to C^{\mathrm{op}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

C を圏とする．各対象 $x \in \mathbf{Set}$, $a \in C$ に対して $x \odot a$ が存在すると仮定する．$\mathbf{Set}$ の射 $k\colon x \to y$, C の射 $f\colon a \to b$ に対して，合成

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_C(y \odot b, y \odot b) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(y, \mathrm{Hom}_C(b, y \odot b)) \\
&\qquad \xrightarrow{\mathrm{Hom}_C(f, y\odot b) \circ - \circ k} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(a, y \odot b)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_C(x \odot a, y \odot b)
\end{aligned}
$$

において $\mathrm{id}_{y\odot b}$ に対応している射を $k \odot f\colon x \odot a \to y \odot b$ とする．このようにして函手 $\odot\colon \mathbf{Set} \times C \to C$ が定まる．同様にして，各対象 $x \in \mathbf{Set}$, $a \in C$ に対して $x \pitchfork a$ が存在するとき，これは函手 $\pitchfork : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times C \to C$ を定める．

定理 21. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$, $E\colon C \to U$ を函手とし，任意の $c, c' \in C$, $d \in D$ に対して copower object $\mathrm{Hom}_D(F(c), d) \odot E(c')$ が存在すると仮定する．さらに，任意の $d \in D$ に対してコエンド $\int^{c\in C} \mathrm{Hom}_D(F(c), d) \odot E(c)$ が存在すると仮定する．このとき，F に沿った E の左 Kan 拡張 $F^{\dagger}E$ が存在する．

証明. $L = \int^{c\in C} \mathrm{Hom}_D(F(c), -) \odot E(c)$ とおく．函手 $S\colon D \to U$ に対して自然に

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{U^D}(L, S) &\cong \int_{d\in D} \mathrm{Hom}_U(L(d), S(d)) \\
&= \int_{d\in D} \mathrm{Hom}_U\left(\int^{c\in C} \mathrm{Hom}_D(F(c), d) \odot E(c), S(d)\right) \\
&\cong \int_{d\in D}\left(\int_{c\in C} \mathrm{Hom}_U(\mathrm{Hom}_D(F(c), d) \odot E(c), S(d))\right) \\
&\cong \int_{d\in D}\left(\int_{c\in C} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(F(c), d), \mathrm{Hom}_U(E(c), S(d)))\right) \\
&\cong \int_{c\in C}\left(\int_{d\in D} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(F(c), d), \mathrm{Hom}_U(E(c), S(d)))\right) \\
&\cong \int_{c\in C} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^D}(\mathrm{Hom}_D(F(c), -), \mathrm{Hom}_U(E(c), S(-))) \\
&\cong \int_{c\in C} \mathrm{Hom}_U(E(c), S(F(c))) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{U^C}(E, S\circ F)
\end{aligned}
$$

であるから $L \cong F^\dagger E$ が従う． □

双対的に次が成り立つ.

定理 22. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$, $E\colon C \to U$ を函手とし，任意の $c, c' \in C$, $d \in D$ に対して power object $\mathrm{Hom}_D(d, F(c)) \pitchfork E(c')$ が存在すると仮定する．さらに，任意の $d \in D$ に対してエンド $\int_{c\in C} \mathrm{Hom}_D(d, F(c)) \pitchfork E(c)$ が存在すると仮定する．このとき，F に沿った E の右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ が存在し，$F^\ddagger E \cong \int_{c\in C} \mathrm{Hom}_D(-, F(c)) \pitchfork E(c)$ が成り立つ.

参考文献

[1] S. Mac Lane 著, 三好博之, 高木理 訳,『圏論の基礎』, 丸善出版, 2012.

[2] E. Dubuc, R. Street, *Dinatural transformations*, In: *Reports of the Midwest Category Seminar IV*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 137, pp. 126–137, Springer, Berlin, 1970.

[3] alg-d, 壱大整域, URL:`http://alg-d.com/math/`.