同値関係 *

ゆう †

2023 年 12 月 20 日

概要

圏論における同値関係を解説する．

目次

1 同値関係

1.1 定義

定義． C を圏，c を C の対象とする．C の対象と射

$$e \overset{r_0}{\underset{r_1}{\rightrightarrows}} c$$

からなる組 $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ で, 任意の対象 $a \in C$, 任意の射 $h, k \colon a \to e$ に対して「$r_0 \circ h = r_0 \circ k$ かつ $r_1 \circ h = r_1 \circ k$ ならば，$h = k$」をみたすものを c 上の関係という． □

* 本稿は，圏論 Advent Calendar 2023 (https://adventar.org/calendars/8591) の 20 日目の記事です．

† https://yuu7269.github.io/notes.

例 1. $R \subseteq X \times X$ を集合 X 上の関係，ι を包含写像 $R \to X \times X$, p_i を射影

$$X \times X \to X, \quad \langle x_0, x_1 \rangle \mapsto x_i \qquad (i = 0,\, 1)$$

とし，$r_i = p_i \circ \iota$ とおく．集合 A と写像 $h,\, k\colon A \to R$ に対して

$$r_0 \circ h = r_0 \circ k, \quad r_1 \circ h = r_1 \circ k$$

とする．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & R \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend left, "r_0"] \arrow[rr, bend right, "r_1"'] & X \times X \arrow[r, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

このとき，積の普遍性から $\iota \circ h = \iota \circ k$ となり，ι がモノ射であるから $h = k$ が従う．故に，$\langle R, r_0, r_1 \rangle$ は集合の圏 **Set** の対象 X 上の関係である． □

命題 2. $r_0,\, r_1\colon e \to c$ を圏 C の射とし，c の積 $\langle c \times c, p_0, p_1 \rangle$ が存在するとする．積の普遍性から得られる，図式

$$\begin{tikzcd}
 & e \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[d, dashed, "r"] \arrow[dr, "r_1"] & \\
c & c \times c \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & c
\end{tikzcd}$$

を可換にする一意的な射を $r\colon e \to c \times c$ とする．このとき，以下は同値である：

(1) $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は c 上の関係である．
(2) r はモノ射である． □

$r_0,\, r_1\colon e \to c$ を圏 C の射とし，$a \in C$ に対して

$$R_a = \{\, \langle r_0 \circ k, r_1 \circ k \rangle \mid k \in \mathrm{Hom}(a, e) \,\}$$

とおく．これは $\mathrm{Hom}(a, c)$ 上の関係である．

定義. $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を圏 C の対象 c 上の関係とする．任意の $a \in C$ に対して R_a が反射的であるとき，$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は反射的であるという．対称的，推移的なども同様に定義する．$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が反射的かつ対称的かつ推移的であるとき，$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を c 上の同値関係という． □

例 3. 圏 C の対象 c に対して，$\langle c, \mathrm{id}_c, \mathrm{id}_c \rangle$ は c 上の同値関係である． □

例 4. $R \subseteq X \times X$ を X 上の同値関係とし，$r_0, r_1 \colon R \to X$ を例 1 で定義した写像とする．このとき，$\langle R, r_0, r_1 \rangle$ は X 上の同値関係である．

集合 A に対して，まず R_A が反射的であることを示す．そのために $f \in \mathrm{Hom}(A, X)$ とする．R が反射的であるから，任意の $x \in X$ に対して $\langle x, x \rangle \in R$ である．写像 $k \colon A \to R$ を $a \mapsto \langle f(a), f(a) \rangle$ で定めると，これは $r_0 \circ k = f$, $r_1 \circ k = f$ をみたすから $\langle f, f \rangle \in R_A$ が従う．故に R_A は反射的である．

R_A が対称的であることを示すため $\langle f_0, f_1 \rangle \in R_A$ とする．R_A の定義から $r_0 \circ k = f_0$, $r_1 \circ k = f_1$ をみたす $k \in \mathrm{Hom}(A, R)$ が存在する．$a \in A$ に対して，$\langle f_0(a), f_1(a) \rangle = k(a) \in R$ であり，R が対称的であるから $\langle f_1(a), f_0(a) \rangle \in R$ となる．写像 $h \colon A \to R$ を $a \mapsto \langle f_1(a), f_0(a) \rangle$ で定めると，これは $r_0 \circ h = f_1$, $r_1 \circ h = f_0$ をみたすから $\langle f_1, f_0 \rangle \in R_A$ が従う．故に R_A は対称的である．

R_A が推移的であることを示すため $\langle f_0, f_1 \rangle, \langle f_1, f_2 \rangle \in R_A$ とする．R_A の定義から，

$$r_0 \circ k_0 = f_0, \quad r_1 \circ k_0 = f_1, \quad r_0 \circ k_1 = f_1, \quad r_1 \circ k_1 = f_2$$

をみたす $k_0, k_1 \in \mathrm{Hom}(A, R)$ が存在する．$a \in A$ に対して，$\langle f_i(a), f_{i+1}(a) \rangle = k_i(a) \in R$ $(i = 0,\ 1)$ であり R が推移的であるから $\langle f_0(a), f_2(a) \rangle \in R$ となる．写像 $h \colon A \to R$ を $a \mapsto \langle f_0(a), f_2(a) \rangle$ で定めると，これは $r_0 \circ h = f_0$, $r_1 \circ h = f_2$ をみたすから $\langle f_0, f_2 \rangle \in R_A$ が従う．故に R_A は推移的である．

よって，任意の集合 A に対して R_A が $\mathrm{Hom}(A, X)$ 上の同値関係であるから，$\langle R, r_0, r_1 \rangle$ は X 上の同値関係である．

逆に，$R \subseteq X \times X$ を X 上の関係，$r_0, r_1 \colon R \to X$ を例 1 で定義した写像とし，$\langle R, r_0, r_1 \rangle$ が X 上の同値関係であるとき，一点集合 1 に対して R_1 は同値関係であり，全単射 $X \cong \mathrm{Hom}(1, X)$ から誘導される全単射 $R \cong R_1$ により R は同値関係となる． □

例 5. $\langle r_0, r_1 \rangle$ を射 $s \colon a \to b$ の kernel pair とする．

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & a \arrow[r, "s"] & b \end{tikzcd}$$

射 $h, k \colon u \to e$ で

$$r_0 \circ h = r_0 \circ k, \quad r_1 \circ h = r_1 \circ k$$

をみたすものに対して，pullback の普遍性から $h = k$ が従う．

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[dr, "{h,\ k}"] \arrow[drr, bend left, "r_1 \circ h = r_1 \circ k"] \arrow[ddr, bend right, "r_0 \circ h = r_0 \circ k"'] & & \\
& e \arrow[r, "r_1"'] \arrow[d, "r_0"] & a \arrow[d, "s"] \\
& a \arrow[r, "s"'] & b
\end{tikzcd}
$$

故に $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は a 上の関係である．

対象 u に対して，まず R_u が反射的であることを示す．射 $f \in \mathrm{Hom}(u, a)$ に対して，pullback の普遍性から，図式

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& e \arrow[r, "r_1"'] \arrow[d, "r_0"] & a \arrow[d, "s"] \\
& a \arrow[r, "s"'] & b
\end{tikzcd}
$$

を可換にする射 $k \colon u \to e$ が存在し，$\langle f, f \rangle \in R_u$ が従う．故に R_u は反射的である．

R_u が対称的であることを示すため $\langle f_0, f_1 \rangle \in R_u$ とする．R_u の定義から $r_0 \circ k = f_0$，$r_1 \circ k = f_1$ をみたす $k \in \mathrm{Hom}(u, e)$ が存在する．故に左の図式

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "f_0"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& e \arrow[r, "r_0"'] \arrow[d, "r_1"] & a \arrow[d, "s"] \\
& a \arrow[r, "s"'] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "f_0"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& e \arrow[r, "r_1"'] \arrow[d, "r_0"] & a \arrow[d, "s"] \\
& a \arrow[r, "s"'] & b
\end{tikzcd}
$$

が可換であるから，pullback の普遍性により右の図式を可換にする射 $h \colon u \to e$ が存在し，$\langle f_1, f_0 \rangle \in R_u$ が従う．故に R_u は対称的である．

R_u が推移的であることを示すため $\langle f_0, f_1 \rangle, \langle f_1, f_2 \rangle \in R_u$ とする．R_u の定義から，

$$r_0 \circ k_0 = f_0, \quad r_1 \circ k_0 = f_1, \quad r_0 \circ k_1 = f_1, \quad r_1 \circ k_1 = f_2$$

をみたす $k_0, k_1 \in \mathrm{Hom}(u, e)$ が存在する．故に左の図式

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[rrrdd, "f_2"] \arrow[drr, "k_1"] \arrow[ddrr, "f_1"] \arrow[ddr, "k_0"] \arrow[dddrr, "f_0"'] & & & \\
& & e \arrow[d, "r_0"] \arrow[dr, "r_1"] & \\
& e \arrow[r, "r_1"'] \arrow[dr, "r_0"'] & a \arrow[dr, "s"] & a \arrow[d, "s"] \\
& & a \arrow[r, "s"'] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[drr, "f_2"] \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[ddr, "f_0"'] & & \\
& e \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_0"'] & a \arrow[d, "s"] \\
& a \arrow[r, "s"'] & b
\end{tikzcd}
$$

が可換であるから，pullback の普遍性により右の図式を可換にする射 $h\colon u \to e$ が存在し，$\langle f_0, f_2 \rangle \in R_u$ が従う．故に R_u は推移的である．

よって，任意の対象 u に対して R_u が $\mathrm{Hom}(u, a)$ 上の同値関係であるから，$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は a 上の同値関係である． □

1.2 pullback や積をもつ圏における同値関係

命題 6. $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を圏 C の対象 c 上の関係とし，r_0, r_1 の pullback $\langle e \times_c e, s_0, s_1 \rangle$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
e \times_c e \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "s_0"'] & e \arrow[d, "r_0"] \\
e \arrow[r, "r_1"'] & c
\end{tikzcd}
$$

このとき，以下は同値である：

(1) $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は同値関係である．

(2) $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は以下の条件をみたす：

   (i) 図式

$$
\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[d, dashed, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_c"] & \\
c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c
\end{tikzcd}
$$

   を可換にする射 $\delta\colon c \to e$ が一意的に存在する．

(ii) 図式

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, dashed, "\sigma"] \arrow[dr, "r_0"] & \\ c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\sigma\colon e \to e$ が一意的に存在する．

(iii) 図式

$$\begin{tikzcd} e \arrow[d, "r_0"'] & e \times_c e \arrow[l, "s_0"'] \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, dashed, "\tau"] & e \arrow[d, "r_1"] \\ c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\tau\colon e \times_c e \to e$ が一意的に存在する．

証明. (1 $\Rightarrow$ 2) R_c は反射的であるから，id_c に対して $\langle \mathrm{id}_c, \mathrm{id}_c \rangle \in R_c$ であり，R_c の定義から，図式

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[d, dashed, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_c"] & \\ c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\delta\colon c \to e$ が存在する．

$r_0 \circ \mathrm{id}_e = r_0$, $r_1 \circ \mathrm{id}_e = r_1$ であるから $\langle r_0, r_1 \rangle \in R_e$ となり，R_e は対称的であるから $\langle r_1, r_0 \rangle \in R_e$ となる．R_e の定義から，図式

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, dashed, "\sigma"] \arrow[dr, "r_0"] & \\ c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\sigma\colon e \to e$ が存在する．

$R_{e \times_c e}$ が推移的であることと，

$$\langle r_0 \circ s_0, r_1 \circ s_0 \rangle \in R_{e \times_c e}, \quad \langle r_0 \circ s_1, r_1 \circ s_1 \rangle \in R_{e \times_c e}, \quad r_1 \circ s_0 = r_0 \circ s_1$$

$$e \times_c e \xrightarrow{s_0} e \underset{r_1}{\overset{r_0}{\rightrightarrows}} c \qquad e \times_c e \xrightarrow{s_1} e \underset{r_1}{\overset{r_0}{\rightrightarrows}} c$$

であることから $\langle r_0 \circ s_0, r_1 \circ s_1 \rangle \in R_{e\times_c e}$ となり，$R_{e\times_c e}$ の定義から，図式

$$\begin{tikzcd} e \arrow[d, "r_0"'] & e \times_c e \arrow[l, "s_0"'] \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, dashed, "\tau"] & e \arrow[d, "r_1"] \\ c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\tau\colon e \times_c e \to e$ が存在する．

射 δ, σ, τ の一意性は $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が c 上の関係であることから従う．

(2 $\Rightarrow$ 1) a を C の対象とする．まず，R_a が反射的であることを示す．$f \in \mathrm{Hom}(a, c)$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & c \\ c \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\delta"'] & e \arrow[u, "r_0"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & c \\ c \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\delta"'] & e \arrow[u, "r_1"'] \end{tikzcd}$$

は可換であるから $\langle f, f \rangle \in R_a$ が従う．故に R_a は反射的である．

R_a が対称的であることを示すため，$\langle f_0, f_1 \rangle \in R_a$ とする．このとき $k \in \mathrm{Hom}(a, e)$ で

$$f_0 = r_0 \circ k, \quad f_1 = r_1 \circ k$$

をみたすものが存在する．図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "k"'] & c \\ e \arrow[ur, "r_1"] \arrow[r, "\sigma"'] & e \arrow[u, "r_0"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "k"'] & c \\ e \arrow[ur, "r_0"] \arrow[r, "\sigma"'] & e \arrow[u, "r_1"'] \end{tikzcd}$$

は可換であるから $\langle f_1, f_0 \rangle \in R_a$ が従う．故に R_a は対称的である．

R_a が推移的であることを示すため，$\langle f_0, f_1 \rangle, \langle f_1, f_2 \rangle \in R_a$ とする．R_a の定義から，

$$r_0 \circ k_0 = f_0, \quad r_1 \circ k_0 = f_1, \quad r_0 \circ k_1 = f_1, \quad r_1 \circ k_1 = f_2$$

をみたす k_0, $k_1 \in \mathrm{Hom}(A, R)$ が存在する．$r_1 \circ k_0 = r_0 \circ k_1$ であるから，pullback の普遍性により，図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "k_1"] \arrow[ddr, bend right, "k_0"'] & & \\ & e \times_c e \arrow[r, "s_1"'] \arrow[d, "s_0"] & e \arrow[d, "r_0"] \\ & e \arrow[r, "r_1"'] & c \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $h\colon a \to e \times_c e$ が存在する．図式

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f_0"] \arrow[dr, "k_0"] \arrow[dd, "h"'] & & c \\
& e \arrow[ur, "r_0"'] & \\
e \times_c e \arrow[ur, "s_0"] \arrow[rr, "\tau"'] & & e \arrow[uu, "r_0"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dr, "k_1"] \arrow[dd, "h"'] & & c \\
& e \arrow[ur, "r_1"'] & \\
e \times_c e \arrow[ur, "s_1"] \arrow[rr, "\tau"'] & & e \arrow[uu, "r_1"']
\end{tikzcd}
$$

は可換であるから $\langle f_0, f_2 \rangle \in R_a$ が従う．故に R_a は推移的である． □

例 7. $R \subseteq X \times X$ を X 上の同値関係とし，r_0, r_1 を例 1 で定義した写像とする．積 $R \times R$ の部分集合 $R \times_X R$ を

$$R \times_X R = \{\, \langle \langle x_{0,0}, x_{0,1} \rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1} \rangle \rangle \mid x_{0,1} = x_{1,0} \,\}$$

で定め，写像 $s_i\colon R \times_X R \to R$ を

$$\langle \langle x_{0,0}, x_{0,1} \rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1} \rangle \rangle \mapsto \langle x_{i,0}, x_{i,1} \rangle \qquad (i = 0,\, 1)$$

で定めると，$\langle R \times_X R, s_0, s_1 \rangle$ は r_0, r_1 の pullback である．

$$
\begin{tikzcd}
R \times_X R \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "s_0"'] & R \arrow[d, "r_0"] \\
R \arrow[r, "r_1"'] & X
\end{tikzcd}
$$

写像 $\delta\colon X \to R$ を $x \mapsto \langle x, x \rangle$ で定めると図式

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, dashed, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
X & R \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & X
\end{tikzcd}
$$

は可換であり，写像 $\sigma\colon R \to R$ を $\langle x_0, x_1 \rangle \mapsto \langle x_1, x_0 \rangle$ で定めると図式

$$
\begin{tikzcd}
& R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, dashed, "\sigma"] \arrow[dr, "r_0"] & \\
X & R \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & X
\end{tikzcd}
$$

は可換であり，写像 $\tau\colon R \times_X R \to R$ を $\langle\langle x_{0,0}, x_{0,1}\rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1}\rangle\rangle \mapsto \langle x_{0,0}, x_{1,1}\rangle$ で定めると図式

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[d, "r_0"'] & R \times_X R \arrow[l, "s_0"'] \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, dashed, "\tau"] & R \arrow[d, "r_1"] \\
X & R \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

は可換である．$\square$

命題 8. $\langle e, r_0, r_1\rangle$ を圏 C の対象 c 上の関係とし，c の積 $\langle c \times c, p_0, p_1\rangle$ と，r_0, r_1 の pullback $\langle e \times_c e, s_0, s_1\rangle$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd}
e \times_c e \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "s_0"'] & e \arrow[d, "r_0"] \\
e \arrow[r, "r_1"'] & c
\end{tikzcd}$$

積の普遍性から得られる，図式

$$\begin{tikzcd}
 & e \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[d, dashed, "r"] \arrow[dr, "r_1"] & \\
c & c \times c \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & c
\end{tikzcd}$$

を可換にする一意的な射を $r\colon e \to c \times c$ とする．このとき，以下は同値である：

(1) $\langle e, r_0, r_1\rangle$ は同値関係である．

(2) r は以下をみたす：

　(i) 積の普遍性から得られる，左の図式

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[d, dashed, "\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_c"] & \\
c & c \times c \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & e \arrow[d, "r"] \\
 & c \times c
\end{tikzcd}$$

　を可換にする射 $\Delta\colon c \to c \times c$ に対して，右の図式を可換にする射 $\delta\colon c \to e$ が一意的に存在する．

(ii) 積の普遍性から得られる，左の図式

$$
\begin{tikzcd}
 & c \times c \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_0"] \arrow[d, dashed, "\Sigma"] & \\
c & c \times c \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "r"] \arrow[d, dashed, "\sigma"'] & c \times c \arrow[d, "\Sigma"] \\
e \arrow[r, "r"'] & c \times c
\end{tikzcd}
$$

を可換にする射 $\Sigma\colon c \times c \to c \times c$ に対して，右の図式を可換にする射 $\sigma\colon e \to e$ が一意的に存在する．

(iii) $\langle e \times_c e, s_0, s_1 \rangle$ を r_0, r_1 の pullback

$$
\begin{tikzcd}
e \times_c e \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "s_0"'] & e \arrow[d, "r_0"] \\
e \arrow[r, "r_1"'] & c
\end{tikzcd}
$$

としたとき，積の普遍性から得られる，左の図式

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[d, "r_0"'] & e \times_c e \arrow[l, "s_0"'] \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, dashed, "T"] & e \arrow[d, "r_1"] \\
c & c \times c \arrow[l, "p_0"'] \arrow[r, "p_1"] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e \times_c e \arrow[r, dashed, "\tau"] \arrow[dr, "T"'] & e \arrow[d, "r"] \\
 & c \times c
\end{tikzcd}
$$

を可換にする射 $T\colon e \times_c e \to c \times c$ に対して，右の図式を可換にする射 τ: $e \times_c e \to e$ が一意的に存在する．

証明. ($1 \Rightarrow 2$) $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は c 上の同値関係であるから，図式

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_c"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & \\
c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c
\end{tikzcd}
$$

を可換にする射 $\delta\colon c \to e$ が存在する．図式

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[d, "\delta"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}_c"] & \\
 & e \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[d, "r"] \arrow[dr, "r_1"] & \\
c & c \times c \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & c
\end{tikzcd}
$$

は可換であるから，積の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & e \arrow[d, "r"] \\
& c \times c
\end{tikzcd}$$

は可換である．

$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は c 上の同値関係であるから，図式

$$\begin{tikzcd}
& e \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, dashed, "\sigma"] \arrow[dr, "r_0"] & \\
c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c
\end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\sigma\colon e \to e$ が存在する．図式

$$\begin{tikzcd}
& e \arrow[d, "\sigma"] \arrow[ddl, "r_1"'] \arrow[ddr, "r_0"] & \\
& e \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[d, "r"] \arrow[dr, "r_1"] & \\
c & c \times c \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& e \arrow[d, "r"] \arrow[ddl, "r_1"'] \arrow[ddr, "r_0"] & \\
& c \times c \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "\Sigma"] \arrow[dr, "p_0"] & \\
c & c \times c \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & c
\end{tikzcd}$$

は可換であるから，積の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\sigma"'] & c \times c \arrow[d, "\Sigma"] \\
e \arrow[r, "r"'] & c \times c
\end{tikzcd}$$

は可換である．

$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は c 上の同値関係であるから，図式

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[d, "r_0"'] & e \times_c e \arrow[l, "s_0"'] \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, dashed, "\tau"] & e \arrow[d, "r_1"] \\
c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c
\end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\tau\colon e\times_c e\to e$ が存在する．図式

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dd, "r_0"'] & e\times_c e \arrow[l, "s_0"'] \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "\tau"] & e \arrow[dd, "r_1"] \\
& e \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[d, "r"] \arrow[dr, "r_1"] & \\
c & c\times c \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & c
\end{tikzcd}$$

は可換であるから，積の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd}
e\times_c e \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "T"'] & e \arrow[d, "r"] \\
& c\times c
\end{tikzcd}$$

は可換である．

δ, σ, τ の一意性は r がモノ射であることから従う．

($2 \Rightarrow 1$) $r_i=p_i\circ r$ $(i=0,\,1)$ であることから従う． □

1.3 effective な同値関係

定義. $\langle e, r_0, r_1\rangle$ を圏 C の対象 c 上の同値関係とする．r_0, r_1 の coequalizer $\langle u, q\rangle$ が存在し，$\langle r_0, r_1\rangle$ が q の kernel pair となるとき，$\langle e, r_0, r_1\rangle$ は effective であるという． □

例 9. **Set** における同値関係は effective である．$\langle R, r_0, r_1\rangle$ を集合 X 上の同値関係とする．一点集合 1 に対して R_1 は同値関係である．

$$S=\{\,\langle r_0(u), r_1(u)\rangle \mid u\in R\,\}$$

とおく．全単射 $X\cong \mathrm{Hom}(1,X)$ から誘導される全単射 $S\cong R_1$ により，S が X 上の同値関係であることがわかる．q を自然な全射 $X\to X/S$ とする．

まず，$\langle X/S, q\rangle$ が r_0, r_1 の coequalizer となることを示す．$q\circ r_0=q\circ r_1$ であることは明らか．A を集合，$s\colon X\to A$ を $s\circ r_0=s\circ r_1$ をみたす写像とする．x_0, $x_1\in X$ に対して $q(x_0)=q(x_1)$ とすると，$\langle x_0, x_1\rangle\in S$ であるから $\langle r_0(v), r_1(v)\rangle=\langle x_0, x_1\rangle$ をみたす $v\in R$ が存在する．このとき

$$s(x_0)=s(r_0(v))=s(r_1(v))=s(x_1)$$

となる．写像 $h\colon X/S \to A$ を $q(x) \mapsto s(x)$ で定めると，これは $h \circ q = s$ をみたす一意的な写像である．

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "s"'] & X/S \arrow[d, dashed, "h"] \\ & & A \end{tikzcd}$$

故に $\langle X/S, q \rangle$ は r_0, r_1 の coequalizer である．

$\langle r_0, r_1 \rangle$ が q の kernel pair であること，つまり図式

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_0"'] & X \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "q"'] & X/S \end{tikzcd}$$

が pullback であることを示す．図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "s_1"] \arrow[ddr, bend right, "s_0"'] & & \\ & R \arrow[r, "r_1"'] \arrow[d, "r_0"] & X \arrow[d, "q"] \\ & X \arrow[r, "q"'] & X/S \end{tikzcd}$$

の外側が可換であるとし，$a \in A$ とする．このとき，$q(s_0(a)) = q(s_1(a))$ であるから $\langle s_0(a), s_1(a) \rangle \in S$ となる．故に $\langle r_0(w), r_1(w) \rangle = \langle s_0(a), s_1(a) \rangle$ をみたす $w \in R$ が存在する．$\langle R, r_0, r_1 \rangle$ が X 上の関係であるから，このような w は一意的である．写像 $k\colon A \to R$ を $a \mapsto w$ で定めると，これは $s_0 = r_0 \circ k$, $s_1 = r_1 \circ k$ をみたす一意的な写像である．故に $\langle r_0, r_1 \rangle$ は q の kernel pair である． □

例 10. 小圏 C 上の presheaf の圏 $\mathbf{PSh}(C)$ における極限や余極限は各点ごとに考えることができる．よって，$\mathbf{PSh}(C)$ における同値関係は effective である． □

補題 11. $\langle r_0, r_1 \rangle$ を射 f_0, f_1 の pullback

$$\begin{tikzcd} a \times_c b \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_0"'] & b \arrow[d, "f_0"] \\ a \arrow[r, "f_1"'] & c \end{tikzcd}$$

とし，a と b の積 $\langle a \times b, p_0, p_1 \rangle$ が存在するとする．積の普遍性から得られる，図式

$$\begin{tikzcd}
 & a \times_c b \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[d, dashed, "r"] \arrow[dr, "r_1"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & b
\end{tikzcd}$$

を可換にする一意的な射を $r\colon a \times_c b \to a \times b$ としたとき，$\langle a \times_c b, r \rangle$ は $f_0 \circ p_1$, $f_1 \circ p_0$ の equalizer である．

証明. $g_0 = f_0 \circ p_1$, $g_1 = f_1 \circ p_0$ とおく．図式

$$\begin{tikzcd}
 & & a \times_c b \arrow[dll, "r"'] \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[dr, "r_1"] \arrow[drr, "r"] & & \\
a \times b \arrow[r, "p_0"] \arrow[drr, "g_1"'] & a \arrow[dr, "f_1"] & & b \arrow[dl, "f_0"'] & a \times b \arrow[l, "p_1"'] \arrow[dll, "g_0"] \\
 & & c & &
\end{tikzcd}$$

は可換である．$s\colon d \to a \times b$ を $g_0 \circ s = g_1 \circ s$ をみたす射とする．このとき，pullback の普遍性から，図式

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, dashed, "h"'] \arrow[dd, "s"'] & & a \times b \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dd, bend left, "g_0"] \\
 & a \times_c b \arrow[r, "r_1"'] \arrow[d, "r_0"] & b \arrow[d, "f_0"] \\
a \times b \arrow[r, "p_0"] \arrow[rr, bend right, "g_1"'] & a \arrow[r, "f_1"] & c
\end{tikzcd}$$

を可換にする射 $h\colon d \to a \times_c b$ が存在する．図式

$$\begin{tikzcd}
a \times b \arrow[dd, "p_0"'] & d \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & a \times b \arrow[dd, "p_1"] \\
 & a \times_c b \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[d, "r"] \arrow[dr, "r_1"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \times b \arrow[dd, "p_0"'] & d \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "s"] \arrow[dd, "s"] & a \times b \arrow[dd, "p_1"] \\
 & & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & b
\end{tikzcd}$$

は可換であるから，積の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "s"'] & a \times_c b \arrow[d, "r"] \\ & a \times b \end{tikzcd}$$

は可換である．$r \circ k = s$ をみたす射 $k\colon d \to a \times_c b$ が与えられたとき，図式

$$\begin{tikzcd} a \times b \arrow[d, "p_0"'] & d \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "k"] & a \times b \arrow[d, "p_1"] \\ a & a \times b \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] \arrow[ul, "r"] \arrow[ur, "r"'] & b \end{tikzcd}$$

は可換であるから，pullback の普遍性により $h = k$ が従う． □

系 12. $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を圏 C の対象 c 上の effective な同値関係とし，c の積 $\langle c \times c, p_0, p_1 \rangle$ が存在するとする．このとき，積の普遍性から得られる，図式

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[d, dashed, "r"] \arrow[dr, "r_1"] & \\ c & c \times c \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & c \end{tikzcd}$$

を可換にする一意的な射 $r\colon e \to c \times c$ は正則モノ射である． □

例 13. 位相空間の圏 **Top** における同値関係は effective とは限らない．二点集合 $X = \{ 0, 1 \}$ の積 $X \times X$ の部分集合 Δ, C を

$$\Delta = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \}, \quad C = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle \}$$

で定める．X を密着空間とし，R を $X \times X$ に集合 $\{ \Delta, C \}$ が生成する位相を与えた空間とする．写像 $r_i\colon R \to X$ を $\langle x_0, x_1 \rangle \mapsto x_i$ $(i = 0,\ 1)$ で定める．r_0, r_1 は連続であり，$\langle R, r_0, r_1 \rangle$ は X 上の関係である．写像 $\delta\colon X \to R$ を $x \mapsto \langle x, x \rangle$ で定めると，$\delta^{-1}(\Delta) = X$, $\delta^{-1}(C) = \emptyset$ であるから δ は連続であり，図式

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ X & R \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & X \end{tikzcd}$$

は可換である．写像 $\sigma\colon R \to R$ を $\langle x_0, x_1\rangle \mapsto \langle x_1, x_0\rangle$ で定めると，$\sigma^{-1}(\Delta) = \Delta$, $\sigma^{-1}(C) = C$ であるから σ は連続であり，図式

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, "r_0"] & \\ X & R \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & X \end{tikzcd}$$

は可換である．$R \times_X R$ を積 $R \times R$ の部分空間

$$\{\, \langle\langle x_{0,0}, x_{0,1}\rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1}\rangle\rangle \mid x_{0,1} = x_{1,0} \,\}$$

とし，写像 $s_i\colon R \times_X R \to R$ を

$$\langle\langle x_{0,0}, x_{0,1}\rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1}\rangle\rangle \mapsto \langle x_{i,0}, x_{i,1}\rangle \qquad (i = 0,\, 1)$$

で定めると，これは連続であり，$\langle R \times_X R, s_0, s_1\rangle$ は r_0, r_1 の pullback である．

$$\begin{tikzcd} R \times_X R \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "s_0"'] & R \arrow[d, "r_0"] \\ R \arrow[r, "r_1"'] & X \end{tikzcd}$$

写像 $\tau\colon R \times_X R \to R$ を $\langle\langle x_{0,0}, x_{0,1}\rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1}\rangle\rangle \mapsto \langle x_{0,0}, x_{1,1}\rangle$ で定める．

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(\Delta) &= \{\, \langle\langle 0,0\rangle, \langle 0,0\rangle\rangle, \langle\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\rangle, \langle\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle\rangle, \langle\langle 1,1\rangle, \langle 1,1\rangle\rangle \,\} \\ &= \bigl(s_0^{-1}(\Delta) \cap s_1^{-1}(\Delta)\bigr) \cup \bigl(s_0^{-1}(C) \cap s_1^{-1}(C)\bigr), \\ \tau^{-1}(C) &= \{\, \langle\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle\rangle, \langle\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\rangle, \langle\langle 1,0\rangle, \langle 0,0\rangle\rangle, \langle\langle 1,1\rangle, \langle 1,0\rangle\rangle \,\} \\ &= \bigl(s_0^{-1}(\Delta) \cap s_1^{-1}(C)\bigr) \cup \bigl(s_0^{-1}(C) \cap s_1^{-1}(\Delta)\bigr) \end{aligned}$$

であるから τ は連続であり，図式

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "r_0"'] & R \times_X R \arrow[l, "s_0"'] \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "\tau"] & R \arrow[d, "r_1"] \\ X & R \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & X \end{tikzcd}$$

は可換である．故に $\langle R, r_0, r_1\rangle$ は X 上の同値関係である．q を X から一点空間 1 への一意的な連続写像とすると，$\langle 1, q\rangle$ は r_0, r_1 の coequalizer である．$\langle X \times X, p_0, p_1\rangle$ を密着

空間 X の積とする．q の kernel pair は $\langle p_0, p_1\rangle$ である．$X \times X$ と R は同型でないから r_0, r_1 は q の kernel pair でない．故に，密着空間 X 上の同値関係 $\langle R, r_0, r_1\rangle$ は effective でない． □

補題 14. $\langle r_0, r_1\rangle$ を射 $f\colon a \to b$ の kernel pair とし，r_0, r_1 の coequalizer $\langle u, q\rangle$ が存在するとする．このとき，$\langle r_0, r_1\rangle$ は q の kernel pair である．

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & a \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"'] & u \\ & b & \end{tikzcd}$$

証明. $f \circ r_0 = f \circ r_1$ であるから，coequalizer の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & a \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"'] & u \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & b & \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $h\colon u \to b$ が存在する．s_0, $s_1\colon v \to a$ を $q \circ s_0 = q \circ s_1$ をみたす射とする．

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[d, shift right, "s_0"'] \arrow[d, shift left, "s_1"] & \\ e \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & a \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"'] & u \arrow[dl, "h"] \\ & b & \end{tikzcd}$$

このとき

$$f \circ s_0 = h \circ q \circ s_0 = h \circ q \circ s_1 = f \circ s_1$$

であるから，pullback の普遍性により

$$r_0 \circ k = s_0, \quad r_1 \circ k = s_1$$

をみたす射 $k\colon v \to e$ が一意的に存在する． □

例 15. 射 $s\colon a \to b$ の kernel pair $\langle r_0, r_1\rangle$ が coequalizer$\langle u, q\rangle$ をもつとする．

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & a \arrow[r, "q"] \arrow[d, "s"'] & u \\ & b & \end{tikzcd}$$

このとき，$\langle r_0, r_1\rangle$ は q の kernel pair であるから $\langle e, r_0, r_1\rangle$ は effective である． $\square$

1.4 表現可能函手としての同値関係

定義. P, $Q\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を函手とする．任意の $a \in C$ に対して，$Q(a) \subseteq P(a)$ であり，包含写像 $Q(a) \to P(a)$ が a について自然であるとき，Q を P の部分函手と呼び，$Q \subseteq P$ で表す． $\square$

C を圏，c を C の対象とする．函手 $H_c\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を

- C の対象 a に対して $H_c(a) = \mathrm{Hom}(a, c) \times \mathrm{Hom}(a, c)$,
- C の射 $f\colon a \to b$ に対して

$$H_c(f)\colon H_c(b) \to H_c(a), \quad \langle k_0, k_1\rangle \mapsto \langle k_0 \circ f, k_1 \circ f\rangle$$

で定める．もし C が c の積 $c \times c$ をもつならば，$H_c \cong \mathrm{Hom}(-, c \times c)$ である．C の射 r_0, $r_1\colon e \to c$ に対して，H_c の部分函手 $R_{\langle r_0, r_1\rangle}\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を

- C の対象 a に対して $R_{\langle r_0, r_1\rangle}(a) = \{\, \langle r_0 \circ k, r_1 \circ k\rangle \mid k \in \mathrm{Hom}(a, e)\,\}$

で定める．写像 θ_a: $\mathrm{Hom}(a, e) \to R_{\langle r_0, r_1\rangle}(a)$ を $f \mapsto \langle r_0 \circ f, r_1 \circ f\rangle$ で定める．定義から，θ_a は全射であり，$\theta = \langle \theta_a\rangle_{a \in C}$ は自然変換 $\mathrm{Hom}(-, e) \Rightarrow R_{\langle r_0, r_1\rangle}$ である．

命題 16. 圏 C の射 r_0, $r_1\colon e \to c$ に対して，以下は同値である：

(1) $\langle e, r_0, r_1\rangle$ は c 上の関係である．
(2) 任意の $a \in C$ に対して θ_a は単射である． $\square$

故に以下が従う．

命題 17. 圏 C の対象 c 上の同値関係 $\langle e, r_0, r_1\rangle$ に対して，部分函手 $R_{\langle r_0, r_1\rangle} \subseteq H_c$ は以下をみたす：

(1) $R_{\langle r_0, r_1\rangle} \cong \mathrm{Hom}(-, e)$.
(2) 任意の $a \in C$ に対して $R_{\langle r_0, r_1\rangle}(a)$ は $\mathrm{Hom}(a, c)$ 上の同値関係である． $\square$

逆に，このような性質をもつ部分函手 R から同値関係 $\langle e, r_0, r_1\rangle$ を得ることができ，R が $R_{\langle r_0, r_1\rangle}$ の形をしていることがわかる．

命題 18. C を圏，c を C の対象とし，部分函手 $R \subseteq H_c$ が以下をみたしているとする．

(1) R は表現可能函手である．

(2) 任意の $a \in C$ に対して $R(a)$ は $\mathrm{Hom}(a, c)$ 上の同値関係である．

このとき，c 上の同値関係 $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ で $R = R_{\langle r_0, r_1 \rangle}$ をみたすものが存在する．

証明． R が表現可能函手であるから，対象 $e \in C$ と同型 $\kappa \colon \mathrm{Hom}(-, e) \Rightarrow R$ が存在する．$\kappa_e(\mathrm{id}_e) = \langle r_0, r_1 \rangle$ とおく．

$f \in \mathrm{Hom}(a, e)$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(e,e) \arrow[r, "\kappa_e"] \arrow[dd, "- \circ f"'] & R(e) \arrow[dd, "R(f)"] \\
& \\
\mathrm{Hom}(a,e) \arrow[r, "\kappa_a"'] & R(a)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "\kappa_e"] \arrow[dd, mapsto, "- \circ f"'] & \langle r_0, r_1 \rangle \arrow[d, mapsto, "R(f)"] \\
& \langle r_0 \circ f, r_1 \circ f \rangle \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
f \arrow[r, mapsto, "\kappa_a"'] & \kappa_a(f)
\end{tikzcd}$$

は可換であるから $\kappa_a(f) = \langle r_0 \circ f, r_1 \circ f \rangle$ が従う．

射 $h, k \colon a \to e$ で

$$r_0 \circ h = r_0 \circ k, \quad r_1 \circ h = r_1 \circ k$$

をみたすものに対して

$$\kappa_a(h) = \langle r_0 \circ h, r_1 \circ h \rangle = \langle r_0 \circ k, r_1 \circ k \rangle = \kappa_a(k)$$

であり，κ_a が単射であるから $h = k$ が従う．故に $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は c 上の関係である．

$w \in R(a)$ とする．κ_a が全射であるから，$\kappa_a(g) = w$ をみたす $g \in \mathrm{Hom}(a, e)$ が存在する．よって

$$w = \kappa_a(g) = \langle r_0 \circ g, r_1 \circ g \rangle \in R_{\langle r_0, r_1 \rangle}(a)$$

となり，$R(a) \subseteq R_{\langle r_0, r_1 \rangle}(a)$ が従う．

R が H_c の部分函手であり，$\langle r_0, r_1 \rangle \in R(e)$ であるから，任意の $f \in \mathrm{Hom}(a, e)$ に対して $\langle r_0 \circ f, r_1 \circ f \rangle = (R(f))(\langle r_0, r_1 \rangle) \in R(a)$ となり，$R_{\langle r_0, r_1 \rangle}(a) \subseteq R(a)$ が従う．

任意の $a \in C$ に対して，$R_{\langle r_0, r_1 \rangle}(a) = R(a)$ であり，$R(a)$ が $\mathrm{Hom}(a, c)$ 上の同値関係であるから，$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は $R_{\langle r_0, r_1 \rangle} = R$ をみたす同値関係である． □

1.5 internal groupoid としての同値関係

定義. C を pullback をもつ圏とする．C の対象と射

$$\begin{tikzcd} c_2 \arrow[r, "m"] & c_1 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_1"'] & c_0 \arrow[l, "n" description] \end{tikzcd}$$

からなる組 $\langle c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, m, n\rangle$ で以下をみたすものを，C における internal category という．

(G1) c_2 は d_0, d_1 の pullback である．$\langle c_2, f_0, f_1\rangle$ が d_0, d_1 の pullback であるとする．

$$\begin{tikzcd} c_2 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "f_1"'] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \\ c_1 \arrow[r, "d_0"'] & c_0 \end{tikzcd}$$

(G2) 図式

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[r, "n"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & c_1 \arrow[d, "d_0"] \\ & c_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c_0 \arrow[r, "n"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \\ & c_0 \end{tikzcd}$$

は可換である．

(G3) 図式

$$\begin{tikzcd} c_2 \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f_0"'] & c_1 \arrow[d, "d_0"] \\ c_1 \arrow[r, "d_0"'] & c_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c_2 \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f_1"'] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \\ c_1 \arrow[r, "d_1"'] & c_0 \end{tikzcd}$$

は可換である．

(G4) G2 から，図式

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & c_0 \arrow[r, "n"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{id}"'] & c_1 \arrow[d, "d_0"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{G2})"] \\ c_1 \arrow[rr, "d_1"'] & & c_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & c_0 \arrow[r, "n"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{id}"'] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \arrow[dl, phantom, "(\mathrm{G2})"] \\ c_1 \arrow[rr, "d_0"'] & & c_0 \end{tikzcd}$$

は可換であり，pullback の普遍性から，図式

$$
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rrd, "\mathrm{id}"] \arrow[rd, dashed, "\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} \\ n\circ d_1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dd, "d_1"'] & & \\
& c_2 \arrow[r, "f_0"'] \arrow[d, "f_1"'] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \\
c_0 \arrow[r, "n"'] & c_1 \arrow[r, "d_0"'] & c_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[rd, dashed, "\left(\begin{smallmatrix} n\circ d_0 \\ \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[rdd, "\mathrm{id}"'] & & c_0 \arrow[d, "n"] \\
& c_2 \arrow[r, "f_0"'] \arrow[d, "f_1"'] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \\
& c_1 \arrow[r, "d_0"'] & c_0
\end{tikzcd}
$$

を可換にする射 $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} \\ n\circ d_1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} n\circ d_0 \\ \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right) \colon c_1 \to c_2$ を得る．これらの射について．図式

$$
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} \\ n\circ d_1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[rd, "\mathrm{id}"'] & c_2 \arrow[d, "m"] \\
& c_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} n\circ d_0 \\ \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[rd, "\mathrm{id}"'] & c_2 \arrow[d, "m"] \\
& c_1
\end{tikzcd}
$$

は可換である．

(G5) $\langle c_3, g_0, g_1\rangle$ を f_0, f_1 の pullback とする．

$$
\begin{tikzcd}
c_3 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"'] & c_2 \arrow[d, "f_1"] \\
c_2 \arrow[r, "f_0"'] & c_1
\end{tikzcd}
$$

G1, G3 から，図式

$$
\begin{tikzcd}
c_3 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"'] & c_2 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[rd, phantom, "(\mathrm{G1})"] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \\
c_2 \arrow[r, "f_0"] \arrow[rd, "m"'] & c_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{G3})"] & c_0 \\
& c_1 \arrow[ru, "d_0"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_3 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_0"'] & c_2 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_0"'] \arrow[rd, phantom, "(\mathrm{G1})"] & c_1 \arrow[d, "d_0"] \\
c_2 \arrow[r, "f_1"] \arrow[rd, "m"'] & c_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{G3})"] & c_0 \\
& c_1 \arrow[ru, "d_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

は可換であり，pullback の普遍性から，図式

$$
\begin{tikzcd}
c_3 \arrow[rr, "g_0"] \arrow[rd, dashed, "\left(\begin{smallmatrix} f_0\circ g_0 \\ m\circ g_1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dd, "g_1"'] & & c_2 \arrow[d, "f_0"] \\
& c_2 \arrow[r, "f_0"'] \arrow[d, "f_1"'] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \\
c_2 \arrow[r, "m"'] & c_1 \arrow[r, "d_0"'] & c_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_3 \arrow[rr, "g_0"] \arrow[rd, dashed, "\left(\begin{smallmatrix} m\circ g_0 \\ f_1\circ g_1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dd, "g_1"'] & & c_2 \arrow[d, "m"] \\
& c_2 \arrow[r, "f_0"'] \arrow[d, "f_1"'] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \\
c_2 \arrow[r, "f_1"'] & c_1 \arrow[r, "d_0"'] & c_0
\end{tikzcd}
$$

を可換にする射 $\binom{f_0\circ g_0}{m\circ g_1}$, $\binom{m\circ g_0}{f_1\circ g_1}\colon c_3 \to c_2$ を得る．これらの射について，図式

$$\begin{tikzcd}
c_3 \arrow[r, "\binom{f_0\circ g_0}{m\circ g_1}"] \arrow[d, "\binom{m\circ g_0}{f_1\circ g_1}"'] & c_2 \arrow[d, "m"] \\
c_2 \arrow[r, "m"'] & c_1
\end{tikzcd}$$

は可換である． □

例 19. **Set** における internal category は小圏である． □

定義. C を pullback をもつ圏，$\langle c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, m, n\rangle$ を C の internal category とする．この組に次をみたす射 $\tau\colon c_1 \to c_1$ を加えたものを，internal groupoid という．

$$\begin{tikzcd}
c_2 \arrow[r, "m"] & c_1 \arrow[loop above, "\tau"] \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_1"'] & c_0 \arrow[l, "n" description]
\end{tikzcd}$$

(G6) 図式

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "d_1"'] & c_1 \arrow[d, "d_0"] \\
& c_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "d_0"'] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \\
& c_0
\end{tikzcd}$$

は可換である．

(G7) G6 と pullback の普遍性から，

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[dr, dashed, "\binom{\mathrm{id}}{\tau}"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\tau"'] & & \\
& c_2 \arrow[r, "f_0"'] \arrow[d, "f_1"] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \\
& c_1 \arrow[r, "d_0"'] & c_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[dr, dashed, "\binom{\tau}{\mathrm{id}}"] \arrow[drr, bend left, "\tau"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& c_2 \arrow[r, "f_0"'] \arrow[d, "f_1"] & c_1 \arrow[d, "d_1"] \\
& c_1 \arrow[r, "d_0"'] & c_0
\end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\binom{\mathrm{id}}{\tau}$, $\binom{\tau}{\mathrm{id}}\colon c_1 \to c_2$ を得る．これらの射について，図式

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{\tau}"] \arrow[d, "d_0"'] & c_2 \arrow[d, "m"] \\
c_0 \arrow[r, "n"'] & c_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r, "\binom{\tau}{\mathrm{id}}"] \arrow[d, "d_1"'] & c_2 \arrow[d, "m"] \\
c_0 \arrow[r, "n"'] & c_1
\end{tikzcd}$$

は可換である． □

命題 20. C を pullback をもつ圏，$\langle e, r_0, r_1\rangle$ を C の対象 c 上の同値関係とし，$\langle c_2, s_0, s_1\rangle$ を r_0, r_1 の pullback とする．

$$\begin{tikzcd} c_2 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "s_0"'] & e \arrow[d, "r_0"] \\ e \arrow[r, "r_1"'] & c \end{tikzcd}$$

$\langle e, r_0, r_1\rangle$ が同値関係であるから，図式

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[d, dashed, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_c"] & \\ c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & e \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, dashed, "\sigma"] \arrow[dr, "r_0"] & \\ c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} e \arrow[d, "r_0"'] & c_2 \arrow[l, "s_0"'] \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, dashed, "\tau"] & e \arrow[d, "r_1"] \\ c & e \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & c \end{tikzcd}$$

を可換にする一意的な射 δ, σ, τ を得る．このとき，$\langle c, e, c_2, r_0, r_1, \tau, \delta, \sigma\rangle$ は internal groupoid である．

$$\begin{tikzcd} c_2 \arrow[r, "\tau"] & e \arrow[loop above, "\sigma"] \arrow[r, shift left=2, "r_0"] \arrow[r, shift right=2, "r_1"'] & c \arrow[l, "\delta" description] \end{tikzcd}$$

証明. G1 は $\langle c_2, s_0, s_1\rangle$ が pullback であることから，G2, G3, G6 は δ, τ, σ のとり方から従う．

(G4) pullback の普遍性から，図式

$$\begin{tikzcd} e \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, dashed, "\binom{\mathrm{id}}{\delta\circ r_1}" description] \arrow[ddd, "r_1"'] & & \\ & c_2 \arrow[r, "s_0"'] \arrow[dd, "s_1"'] & e \arrow[dd, "r_1"] \\ & & \\ c \arrow[r, "\delta"'] & e \arrow[r, "r_0"'] & c \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} e \arrow[rr, "r_0"] \arrow[dr, dashed, "\binom{\delta\circ r_0}{\mathrm{id}}" description] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & c \arrow[d, "\delta"] \\ & c_2 \arrow[r, "s_0"'] \arrow[d, "s_1"'] & e \arrow[d, "r_1"] \\ & e \arrow[r, "r_0"'] & c \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\binom{\mathrm{id}}{\delta\circ r_1}$, $\binom{\delta\circ r_0}{\mathrm{id}}\colon e\to c_2$ を得る．図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & e \arrow[dr, "r_0"] & \\
c \arrow[urr, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{\delta\circ r_1}"'] & c_2 \arrow[ur, "s_0"'] \arrow[dr, "\tau"] & & c \\
 & & e \arrow[ur, "r_0"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & e \arrow[dr, "r_1"] & \\
 & c \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\delta"] & & c \\
e \arrow[uurr, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "r_1"'] \arrow[dr, "\binom{\mathrm{id}}{\delta\circ r_1}"'] & & e \arrow[ur, "r_1"'] & \\
 & c_2 \arrow[ur, "s_1"] \arrow[rr, "\tau"'] & & e \arrow[uu, "r_1"']
\end{tikzcd}
$$

は可換であり，$\langle e, r_0, r_1\rangle$ が関係であるから，図式

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{\delta\circ r_1}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & c_2 \arrow[d, "\tau"] \\
 & e
\end{tikzcd}
$$

は可換である．同様に，図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & e \arrow[dr, "r_0"] & \\
 & c \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\delta"] & & c \\
e \arrow[uurr, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "r_0"'] \arrow[dr, "\binom{\delta\circ r_0}{\mathrm{id}}"'] & & e \arrow[ur, "r_0"'] & \\
 & c_2 \arrow[ur, "s_0"] \arrow[rr, "\tau"'] & & e \arrow[uu, "r_0"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & e \arrow[dr, "r_1"] & \\
c \arrow[urr, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\binom{\delta\circ r_0}{\mathrm{id}}"'] & c_2 \arrow[ur, "s_1"'] \arrow[dr, "\tau"] & & c \\
 & & e \arrow[ur, "r_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

は可換であり，$\langle e, r_0, r_1\rangle$ が関係であるから，図式

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "\binom{\delta\circ r_0}{\mathrm{id}}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & c_2 \arrow[d, "\tau"] \\
 & e
\end{tikzcd}
$$

は可換である．

(G5) $\langle c_3, t_0, t_1\rangle$ を s_0, s_1 の pullback とする．

$$
\begin{tikzcd}
c_3 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "t_0"'] & c_2 \arrow[d, "s_0"] \\
c_2 \arrow[r, "s_1"'] & e
\end{tikzcd}
$$

pullback の普遍性から，図式

$$
\begin{tikzcd}
c_3 \arrow[rr, "t_0"] \arrow[dr, dashed, "\binom{s_0 \circ t_0}{\tau \circ t_1}"] \arrow[dd, "t_1"'] & & c_2 \arrow[d, "s_0"] \\
& c_2 \arrow[r, "s_0"'] \arrow[d, "s_1"'] & e \arrow[d, "r_1"] \\
c_2 \arrow[r, "\tau"'] & e \arrow[r, "r_0"'] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_3 \arrow[rr, "t_0"] \arrow[dr, dashed, "\binom{\tau \circ t_0}{s_1 \circ t_1}"] \arrow[dd, "t_1"'] & & c_2 \arrow[d, "\tau"] \\
& c_2 \arrow[r, "s_0"'] \arrow[d, "s_1"'] & e \arrow[d, "r_1"] \\
c_2 \arrow[r, "s_1"'] & e \arrow[r, "r_0"'] & c
\end{tikzcd}
$$

を可換にする射 $\binom{s_0 \circ t_0}{\tau \circ t_1}, \binom{\tau \circ t_0}{s_1 \circ t_1} \colon c_3 \to c_2$ を得る．図式

$$
\begin{tikzcd}
& c_2 \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "s_0"'] & & e \arrow[dd, "r_0"] \\
& & e \arrow[dr, "r_0"] & \\
c_3 \arrow[uur, "\binom{s_0 \circ t_0}{\tau \circ t_1}"] \arrow[r, "t_0"] \arrow[ddr, "\binom{\tau \circ t_0}{s_1 \circ t_1}"'] & c_2 \arrow[ur, "s_0"'] \arrow[dr, "\tau"] & & c \\
& & e \arrow[ur, "r_0"'] & \\
& c_2 \arrow[ur, "s_0"] \arrow[rr, "\tau"'] & & e \arrow[uu, "r_0"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& c_2 \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "s_1"'] & & e \arrow[dd, "r_1"] \\
& & e \arrow[dr, "r_1"] & \\
c_3 \arrow[uur, "\binom{s_0 \circ t_0}{\tau \circ t_1}"] \arrow[r, "t_1"] \arrow[ddr, "\binom{\tau \circ t_0}{s_1 \circ t_1}"'] & c_2 \arrow[ur, "\tau"'] \arrow[dr, "s_1"] & & c \\
& & e \arrow[ur, "r_1"'] & \\
& c_2 \arrow[ur, "s_1"] \arrow[rr, "\tau"'] & & e \arrow[uu, "r_1"']
\end{tikzcd}
$$

は可換であり，$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が関係であるから，図式

$$
\begin{tikzcd}
c_3 \arrow[r, "\binom{s_0 \circ t_0}{\tau \circ t_1}"] \arrow[d, "\binom{\tau \circ t_0}{s_1 \circ t_1}"'] & c_2 \arrow[d, "\tau"] \\
c_2 \arrow[r, "\tau"'] & e
\end{tikzcd}
$$

は可換である．

(G7) pullback の普遍性から，

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, dashed, "\binom{\mathrm{id}}{\sigma}"] \arrow[ddr, bend right, "\sigma"'] & & \\
& c_2 \arrow[r, "s_0"'] \arrow[d, "s_1"] & e \arrow[d, "r_1"] \\
& e \arrow[r, "r_0"'] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e \arrow[drr, bend left, "\sigma"] \arrow[dr, dashed, "\binom{\sigma}{\mathrm{id}}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& c_2 \arrow[r, "s_0"'] \arrow[d, "s_1"] & e \arrow[d, "r_1"] \\
& e \arrow[r, "r_0"'] & c
\end{tikzcd}
$$

を可換にする射 $\binom{\mathrm{id}}{\sigma}, \binom{\sigma}{\mathrm{id}} \colon e \to c_2$ を得る．図式

$$
\begin{tikzcd}
 & c_2 \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "s_0"] & & e \arrow[dr, "r_0"] & \\
e \arrow[ur, "\binom{\mathrm{id}}{\sigma}"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "r_0"'] & & e \arrow[rr, "r_0"] & & c \\
 & c \arrow[urrr, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "\delta"'] & & e \arrow[ur, "r_0"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & c_2 \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "s_1"] & & e \arrow[dr, "r_1"] & \\
e \arrow[ur, "\binom{\mathrm{id}}{\sigma}"] \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "r_0"'] & & e \arrow[rr, "r_1"] & & c \\
 & c \arrow[urrr, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "\delta"'] & & e \arrow[ur, "r_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

は可換であり，$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が関係であるから，図式

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{\sigma}"] \arrow[d, "r_0"'] & c_2 \arrow[d, "\tau"] \\
c \arrow[r, "\delta"'] & e
\end{tikzcd}
$$

は可換である．同様に，図式

$$
\begin{tikzcd}
 & c_2 \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "s_0"] & & e \arrow[dr, "r_0"] & \\
e \arrow[ur, "\binom{\sigma}{\mathrm{id}}"] \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "r_1"'] & & e \arrow[rr, "r_0"] & & c \\
 & c \arrow[urrr, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "\delta"'] & & e \arrow[ur, "r_0"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & c_2 \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "s_1"] & & e \arrow[dr, "r_1"] & \\
e \arrow[ur, "\binom{\sigma}{\mathrm{id}}"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "r_1"'] & & e \arrow[rr, "r_1"] & & c \\
 & c \arrow[urrr, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "\delta"'] & & e \arrow[ur, "r_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

は可換であり，$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が関係であるから，図式

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "\binom{\sigma}{\mathrm{id}}"] \arrow[d, "r_1"'] & c_2 \arrow[d, "\tau"] \\
c \arrow[r, "\delta"'] & e
\end{tikzcd}
$$

は可換である． □

internal groupoid の定義から，直ちに以下が従う．

命題 21. C を pullback をもつ圏，$\langle c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, m, n, \tau \rangle$ を C の internal groupoid とする．$\langle c_1, d_0, d_1 \rangle$ が c_0 上の関係ならば，これは同値関係である． □

例 22. $\langle R, r_0, r_1\rangle$ を **Set** の対象 X 上の同値関係とし，$\langle R\times_X R, s_0, s_1\rangle$ を r_0, r_1 の pullback とする．

$$\begin{tikzcd} R\times_X R \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "s_0"'] & R \arrow[d, "r_0"] \\ R \arrow[r, "r_1"'] & X \end{tikzcd}$$

このとき，図式

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, dashed, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ X & R \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & X \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, dashed, "\sigma"] \arrow[dr, "r_0"] & \\ X & R \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & X \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} R \arrow[d, "r_0"'] & R\times_X R \arrow[l, "s_0"'] \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, dashed, "\tau"] & R \arrow[d, "r_1"] \\ X & R \arrow[l, "r_0"] \arrow[r, "r_1"'] & X \end{tikzcd}$$

を可換にする一意的な射 δ, σ, τ を得る．小圏 C を

- $\mathrm{Ob}(C) = X$,
- $\mathrm{Mor}(C) = R$,
- $f \in R$ に対して $\mathrm{dom}(f) = r_0(f)$, $\mathrm{cod}(f) = r_1(f)$,
- $w \in R\times_X R$ に対して $s_1(w)\circ s_0(w) = \tau(w)$,
- $x \in X$ に対して $\mathrm{id}_x = \delta(x)$

で定め，x, $y \in X$ に対して

$$\mathrm{Hom}(x,y) = \{\, f \in \mathrm{Mor}(C) \mid r_0(f) = x,\ r_1(f) = y \,\}$$

とおく．$\langle R, r_0, r_1\rangle$ が関係であるから，任意の x, $y \in X$ に対して $|\mathrm{Hom}(x,y)| \le 1$ である．特に，任意の $x \in X$ に対して $|\mathrm{Hom}(x,x)| = 1$ である．$f \in \mathrm{Hom}(x,y)$ に対して，$\sigma(f) \in \mathrm{Hom}(y,x)$ であり，$\sigma(f)\circ f = \mathrm{id}_x$, $f\circ\sigma(f) = \mathrm{id}_y$ である．故に C は，任意の射が同型射であり，任意の Hom 集合が高々一つの射をもつ小圏である．

特に，例 1 や例 7 で定義した集合や写像を用いると，小圏 C は

- $\mathrm{Ob}(C) = X$,
- $\mathrm{Mor}(C) = R$,
- $\langle x,y\rangle \in R$ に対して $\mathrm{dom}(\langle x,y\rangle) = x$, $\mathrm{cod}(\langle x,y\rangle) = y$,
- $\langle\langle x,y\rangle, \langle y,z\rangle\rangle \in R\times_X R$ に対して $\langle y,z\rangle\circ\langle x,y\rangle = \langle x,z\rangle$,
- $x \in X$ に対して $\mathrm{id}_x = \langle x,x\rangle$

であり，x, $y \in X$ に対して

$$\mathrm{Hom}(x,y) = \begin{cases} \{ \langle x,y \rangle \} & \langle x,y \rangle \in R \\ \emptyset & \langle x,y \rangle \notin R \end{cases}$$

である． □

参考文献

[Bor94a] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1*, Vol. 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994.

[Bor94b] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2*, Vol. 51 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994.

[nLa23] nLab authors. congruence. `https://ncatlab.org/nlab/show/congruence`, December 2023. Revision 34.