

同値関係 *

ゆう †

2023年12月20日

概要

圏論における同値関係を解説する.

目次

| | | |
|-----|----------------------------|----|
| 1 | 同値関係 | 1 |
| 1.1 | 定義 | 1 |
| 1.2 | pullback や積をもつ圏における同値関係 | 5 |
| 1.3 | effective な同値関係 | 12 |
| 1.4 | 表現可能関手としての同値関係 | 18 |
| 1.5 | internal groupoid としての同値関係 | 20 |

1 同値関係

1.1 定義

定義. C を圏, c を C の対象とする. C の対象と射

$$e \begin{array}{c} \xrightarrow{r_0} \\ \xrightarrow{r_1} \end{array} c$$

からなる組 $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ で, 任意の対象 $a \in C$, 任意の射 $h, k: a \rightarrow e$ に対して「 $r_0 \circ h = r_0 \circ k$ かつ $r_1 \circ h = r_1 \circ k$ 」ならば, $h = k$ 」をみたすものを c 上の関係という. \square

* 本稿は, 圏論 Advent Calendar 2023 (<https://adventar.org/calendars/8591>) の 20 日目の記事です.

† <https://yuu7269.github.io/notes>.

例 1. $R \subseteq X \times X$ を集合 X 上の関係, ι を包含写像 $R \rightarrow X \times X$, p_i を射影

$$X \times X \rightarrow X, \quad \langle x_0, x_1 \rangle \mapsto x_i \quad (i = 0, 1)$$

とし, $r_i = p_i \circ \iota$ とおく. 集合 A と写像 $h, k: A \rightarrow R$ に対して

$$r_0 \circ h = r_0 \circ k, \quad r_1 \circ h = r_1 \circ k$$

とする.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{k} \end{array} R \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota} \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} X \times X \begin{array}{c} \xrightarrow{p_0} \\ \xrightarrow{p_1} \end{array} X$$

$\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^{r_0} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{r_1} \end{array}$

このとき, 積の普遍性から $\iota \circ h = \iota \circ k$ となり, ι がモノ射であるから $h = k$ が従う. 故に, $\langle R, r_0, r_1 \rangle$ は集合の圏 **Set** の対象 X 上の関係である. □

命題 2. $r_0, r_1: e \rightarrow c$ を圏 C の射とし, c の積 $\langle c \times c, p_0, p_1 \rangle$ が存在するとする. 積の普遍性から得られる, 図式

$$\begin{array}{ccccc} & & e & & \\ & \swarrow r_0 & \downarrow r & \searrow r_1 & \\ c & \xleftarrow{p_0} & c \times c & \xrightarrow{p_1} & c \end{array}$$

を可換にする一意的な射を $r: e \rightarrow c \times c$ とする. このとき, 以下は同値である:

- (1) $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は c 上の関係である.
- (2) r はモノ射である. □

$r_0, r_1: e \rightarrow c$ を圏 C の射とし, $a \in C$ に対して

$$R_a = \{ \langle r_0 \circ k, r_1 \circ k \rangle \mid k \in \text{Hom}(a, e) \}$$

とおく. これは $\text{Hom}(a, c)$ 上の関係である.

定義. $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を圏 C の対象 c 上の関係とする. 任意の $a \in C$ に対して R_a が反射的であるとき, $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は反射的であるという. 対称的, 推移的なども同様に定義する. $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が反射的かつ対称的かつ推移的であるとき, $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を c 上の同値関係という. □

例 3. 圏 C の対象 c に対して, $\langle c, \text{id}_c, \text{id}_c \rangle$ は c 上の同値関係である. □

例 4. $R \subseteq X \times X$ を X 上の同値関係とし, $r_0, r_1: R \rightarrow X$ を例 1 で定義した写像とする. このとき, $\langle R, r_0, r_1 \rangle$ は X 上の同値関係である.

集合 A に対して, まず R_A が反射的であることを示す. そのために $f \in \text{Hom}(A, X)$ とする. R が反射的であるから, 任意の $x \in X$ に対して $\langle x, x \rangle \in R$ である. 写像 $k: A \rightarrow R$ を $a \mapsto \langle f(a), f(a) \rangle$ で定めると, これは $r_0 \circ k = f, r_1 \circ k = f$ をみたすから $\langle f, f \rangle \in R_A$ が従う. 故に R_A は反射的である.

R_A が対称的であることを示すため $\langle f_0, f_1 \rangle \in R_A$ とする. R_A の定義から $r_0 \circ k = f_0, r_1 \circ k = f_1$ をみたす $k \in \text{Hom}(A, R)$ が存在する. $a \in A$ に対して, $\langle f_0(a), f_1(a) \rangle = k(a) \in R$ であり, R が対称的であるから $\langle f_1(a), f_0(a) \rangle \in R$ となる. 写像 $h: A \rightarrow R$ を $a \mapsto \langle f_1(a), f_0(a) \rangle$ で定めると, これは $r_0 \circ h = f_1, r_1 \circ h = f_0$ をみたすから $\langle f_1, f_0 \rangle \in R_A$ が従う. 故に R_A は対称的である.

R_A が推移的であることを示すため $\langle f_0, f_1 \rangle, \langle f_1, f_2 \rangle \in R_A$ とする. R_A の定義から,

$$r_0 \circ k_0 = f_0, \quad r_1 \circ k_0 = f_1, \quad r_0 \circ k_1 = f_1, \quad r_1 \circ k_1 = f_2$$

をみたす $k_0, k_1 \in \text{Hom}(A, R)$ が存在する. $a \in A$ に対して, $\langle f_i(a), f_{i+1}(a) \rangle = k_i(a) \in R$ ($i = 0, 1$) であり R が推移的であるから $\langle f_0(a), f_2(a) \rangle \in R$ となる. 写像 $h: A \rightarrow R$ を $a \mapsto \langle f_0(a), f_2(a) \rangle$ で定めると, これは $r_0 \circ h = f_0, r_1 \circ h = f_2$ をみたすから $\langle f_0, f_2 \rangle \in R_A$ が従う. 故に R_A は推移的である.

よって, 任意の集合 A に対して R_A が $\text{Hom}(A, X)$ 上の同値関係であるから, $\langle R, r_0, r_1 \rangle$ は X 上の同値関係である.

逆に, $R \subseteq X \times X$ を X 上の関係, $r_0, r_1: R \rightarrow X$ を例 1 で定義した写像とし, $\langle R, r_0, r_1 \rangle$ が X 上の同値関係であるとき, 一点集合 1 に対して R_1 は同値関係であり, 全単射 $X \cong \text{Hom}(1, X)$ から誘導される全単射 $R \cong R_1$ により R は同値関係となる. \square

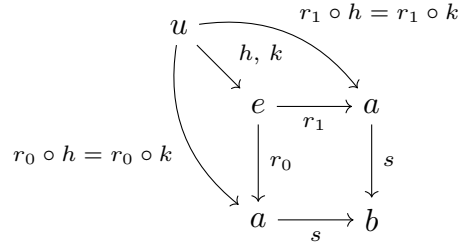
例 5. $\langle r_0, r_1 \rangle$ を射 $s: a \rightarrow b$ の kernel pair とする.

$$e \begin{array}{c} \xrightarrow{r_0} \\ \xrightarrow{r_1} \end{array} a \xrightarrow{s} b$$

射 $h, k: u \rightarrow e$ で

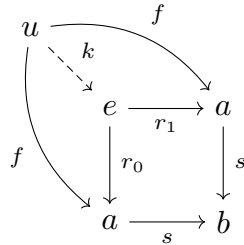
$$r_0 \circ h = r_0 \circ k, \quad r_1 \circ h = r_1 \circ k$$

をみたすものに対して, pullback の普遍性から $h = k$ が従う.



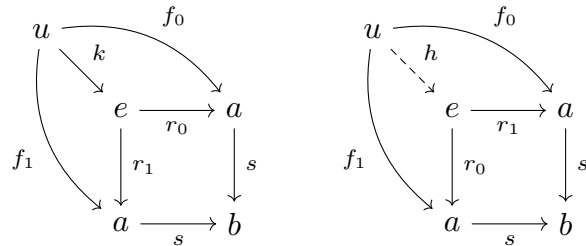
故に $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は a 上の関係である.

対象 u に対して, まず R_u が反射的であることを示す. 射 $f \in \text{Hom}(u, a)$ に対して, pullback の普遍性から, 図式



を可換にする射 $k: u \rightarrow e$ が存在し, $\langle f, f \rangle \in R_u$ が従う. 故に R_u は反射的である.

R_u が対称的であることを示すため $\langle f_0, f_1 \rangle \in R_u$ とする. R_u の定義から $r_0 \circ k = f_0$, $r_1 \circ k = f_1$ をみたす $k \in \text{Hom}(u, e)$ が存在する. 故に左の図式

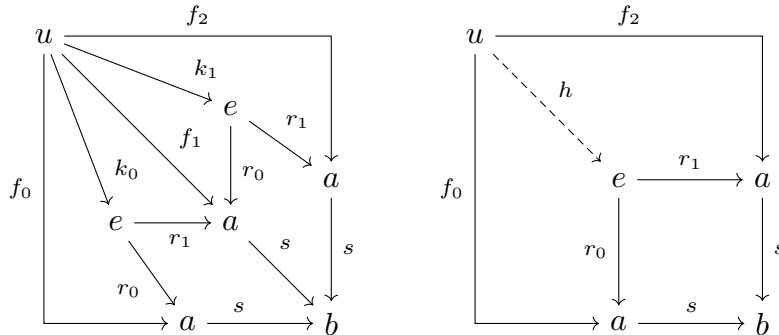


が可換であるから, pullback の普遍性により右の図式を可換にする射 $h: u \rightarrow e$ が存在し, $\langle f_1, f_0 \rangle \in R_u$ が従う. 故に R_u は対称的である.

R_u が推移的であることを示すため $\langle f_0, f_1 \rangle, \langle f_1, f_2 \rangle \in R_u$ とする. R_u の定義から,

$$r_0 \circ k_0 = f_0, \quad r_1 \circ k_0 = f_1, \quad r_0 \circ k_1 = f_1, \quad r_1 \circ k_1 = f_2$$

をみたす $k_0, k_1 \in \text{Hom}(u, e)$ が存在する. 故に左の図式



が可換であるから, pullback の普遍性により右の図式を可換にする射 $h: u \rightarrow e$ が存在し, $\langle f_0, f_2 \rangle \in R_u$ が従う. 故に R_u は推移的である.

よって, 任意の対象 u に対して R_u が $\text{Hom}(u, a)$ 上の同値関係であるから, $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は a 上の同値関係である. \square

1.2 pullback や積をもつ圏における同値関係

命題 6. $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を圏 C の対象 c 上の関係とし, r_0, r_1 の pullback $\langle e \times_c e, s_0, s_1 \rangle$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc} e \times_c e & \xrightarrow{s_1} & e \\ s_0 \downarrow & & \downarrow r_0 \\ e & \xrightarrow{r_1} & c \end{array}$$

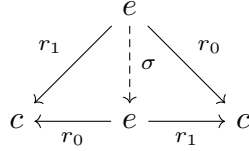
このとき, 以下は同値である:

- (1) $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は同値関係である.
- (2) $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は以下の条件をみたす:
 - (i) 図式

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ \text{id}_c \swarrow & \vdots & \searrow \text{id}_c \\ c & \xleftarrow{r_0} e \xrightarrow{r_1} & c \\ & \downarrow \delta & \end{array}$$

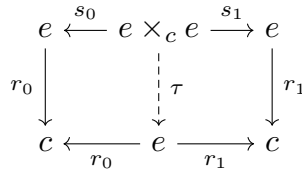
を可換にする射 $\delta: c \rightarrow e$ が一意的存在する.

(ii) 図式



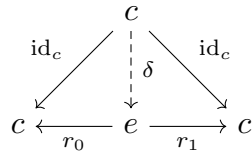
を可換にする射 $\sigma: e \rightarrow e$ が一意に存在する.

(iii) 図式



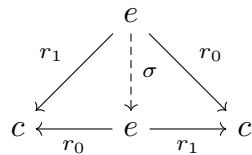
を可換にする射 $\tau: e \times_c e \rightarrow e$ が一意に存在する.

証明. (1 \Rightarrow 2) R_c は反射的であるから, id_c に対して $\langle \text{id}_c, \text{id}_c \rangle \in R_c$ であり, R_c の定義から, 図式



を可換にする射 $\delta: c \rightarrow e$ が存在する.

$r_0 \circ \text{id}_c = r_0, r_1 \circ \text{id}_c = r_1$ であるから $\langle r_0, r_1 \rangle \in R_e$ となり, R_e は対称的であるから $\langle r_1, r_0 \rangle \in R_e$ となる. R_e の定義から, 図式



を可換にする射 $\sigma: e \rightarrow e$ が存在する.

$R_{e \times_c e}$ が推移的であることと,

$$\langle r_0 \circ s_0, r_1 \circ s_0 \rangle \in R_{e \times_c e}, \quad \langle r_0 \circ s_1, r_1 \circ s_1 \rangle \in R_{e \times_c e}, \quad r_1 \circ s_0 = r_0 \circ s_1$$

$$e \times_c e \xrightarrow{s_0} e \xrightarrow[r_1]{r_0} c \quad e \times_c e \xrightarrow{s_1} e \xrightarrow[r_1]{r_0} c$$

であることから $\langle r_0 \circ s_0, r_1 \circ s_1 \rangle \in R_{e \times_c e}$ となり, $R_{e \times_c e}$ の定義から, 図式

$$\begin{array}{ccccc} e & \xleftarrow{s_0} & e \times_c e & \xrightarrow{s_1} & e \\ r_0 \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow r_1 \\ c & \xleftarrow{r_0} & e & \xrightarrow{r_1} & c \end{array}$$

を可換にする射 $\tau: e \times_c e \rightarrow e$ が存在する.

射 δ, σ, τ の一意性は $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が c 上の関係であることから従う.

(2 \Rightarrow 1) a を C の対象とする. まず, R_a が反射的であることを示す. $f \in \text{Hom}(a, c)$ に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & c \\ f \downarrow & \text{id} \nearrow & \uparrow r_0 \\ c & \xrightarrow{\delta} & e \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & c \\ f \downarrow & \text{id} \nearrow & \uparrow r_1 \\ c & \xrightarrow{\delta} & e \end{array}$$

は可換であるから $\langle f, f \rangle \in R_a$ が従う. 故に R_a は反射的である.

R_a が対称的であることを示すため, $\langle f_0, f_1 \rangle \in R_a$ とする. このとき $k \in \text{Hom}(a, e)$ で

$$f_0 = r_0 \circ k, \quad f_1 = r_1 \circ k$$

をみたすものが存在する. 図式

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f_1} & c \\ k \downarrow & r_1 \nearrow & \uparrow r_0 \\ e & \xrightarrow{\sigma} & e \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f_0} & c \\ k \downarrow & r_0 \nearrow & \uparrow r_1 \\ e & \xrightarrow{\sigma} & e \end{array}$$

は可換であるから $\langle f_1, f_0 \rangle \in R_a$ が従う. 故に R_a は対称的である.

R_a が推移的であることを示すため, $\langle f_0, f_1 \rangle, \langle f_1, f_2 \rangle \in R_a$ とする. R_a の定義から,

$$r_0 \circ k_0 = f_0, \quad r_1 \circ k_0 = f_1, \quad r_0 \circ k_1 = f_1, \quad r_1 \circ k_1 = f_2$$

をみたす $k_0, k_1 \in \text{Hom}(A, R)$ が存在する. $r_1 \circ k_0 = r_0 \circ k_1$ であるから, pullback の普遍性により, 図式

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{k_1} & e \\ \downarrow k_0 & \searrow h & \downarrow s_0 \\ e & \xrightarrow{\sigma} & e \\ & & \downarrow s_1 \\ & & e \\ & & \downarrow r_0 \\ & & c \end{array}$$

を可換にする射 $h: a \rightarrow e \times_c e$ が存在する. 図式

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f_0} & c \\
 \downarrow h & \searrow k_0 & \nearrow r_0 \\
 & e & \\
 \nearrow s_0 & & \downarrow r_0 \\
 e \times_c e & \xrightarrow{\tau} & e
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f_2} & c \\
 \downarrow h & \searrow k_1 & \nearrow r_1 \\
 & e & \\
 \nearrow s_1 & & \downarrow r_1 \\
 e \times_c e & \xrightarrow{\tau} & e
 \end{array}$$

は可換であるから $\langle f_0, f_2 \rangle \in R_a$ が従う. 故に R_a は推移的である. \square

例 7. $R \subseteq X \times X$ を X 上の同値関係とし, r_0, r_1 を例 1 で定義した写像とする. 積 $R \times R$ の部分集合 $R \times_X R$ を

$$R \times_X R = \{ \langle \langle x_{0,0}, x_{0,1} \rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1} \rangle \rangle \mid x_{0,1} = x_{1,0} \}$$

で定め, 写像 $s_i: R \times_X R \rightarrow R$ を

$$\langle \langle x_{0,0}, x_{0,1} \rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1} \rangle \rangle \mapsto \langle x_{i,0}, x_{i,1} \rangle \quad (i = 0, 1)$$

で定めると, $\langle R \times_X R, s_0, s_1 \rangle$ は r_0, r_1 の pullback である.

$$\begin{array}{ccc}
 R \times_X R & \xrightarrow{s_1} & R \\
 s_0 \downarrow & & \downarrow r_0 \\
 R & \xrightarrow{r_1} & X
 \end{array}$$

写像 $\delta: X \rightarrow R$ を $x \mapsto \langle x, x \rangle$ で定めると図式

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \text{id} \swarrow & \vdots \delta & \searrow \text{id} \\
 X & \xleftarrow{r_0} R \xrightarrow{r_1} & X
 \end{array}$$

は可換であり, 写像 $\sigma: R \rightarrow R$ を $\langle x_0, x_1 \rangle \mapsto \langle x_1, x_0 \rangle$ で定めると図式

$$\begin{array}{ccc}
 & R & \\
 r_1 \swarrow & \vdots \sigma & \searrow r_0 \\
 X & \xleftarrow{r_0} R \xrightarrow{r_1} & X
 \end{array}$$

は可換であり, 写像 $\tau: R \times_X R \rightarrow R$ を $\langle \langle x_{0,0}, x_{0,1} \rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1} \rangle \rangle \mapsto \langle x_{0,0}, x_{1,1} \rangle$ で定めると図式

$$\begin{array}{ccccc} R & \xleftarrow{s_0} & R \times_X R & \xrightarrow{s_1} & R \\ r_0 \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow r_1 \\ X & \xleftarrow{r_0} & R & \xrightarrow{r_1} & X \end{array}$$

は可換である. □

命題 8. $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を圏 C の対象 c 上の関係とし, c の積 $\langle c \times c, p_0, p_1 \rangle$ と, r_0, r_1 の pullback $\langle e \times_c e, s_0, s_1 \rangle$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc} e \times_c e & \xrightarrow{s_1} & e \\ s_0 \downarrow & & \downarrow r_0 \\ e & \xrightarrow{r_1} & c \end{array}$$

積の普遍性から得られる, 図式

$$\begin{array}{ccccc} & & e & & \\ & r_0 \swarrow & \downarrow r & \searrow r_1 & \\ c & \xleftarrow{p_0} & c \times c & \xrightarrow{p_1} & c \end{array}$$

を可換にする一意的な射を $r: e \rightarrow c \times c$ とする. このとき, 以下は同値である:

- (1) $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は同値関係である.
- (2) r は以下をみたす:
 - (i) 積の普遍性から得られる, 左の図式

$$\begin{array}{ccc} c & & e \\ \text{id}_c \swarrow & \downarrow \Delta & \searrow \text{id}_c \\ c & \xleftarrow{p_0} & c \times c & \xrightarrow{p_1} & c \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\delta} & e \\ \Delta \swarrow & & \downarrow r \\ & & c \times c \end{array}$$

を可換にする射 $\Delta: c \rightarrow c \times c$ に対して, 右の図式を可換にする射 $\delta: c \rightarrow e$ が一意的に存在する.

(ii) 積の普遍性から得られる, 左の図式

$$\begin{array}{ccc}
 & c \times c & \\
 p_1 \swarrow & \downarrow \Sigma & \searrow p_0 \\
 c & c \times c & c \\
 \xleftarrow{p_0} & & \xrightarrow{p_1}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 e & \xrightarrow{r} & c \times c \\
 \sigma \downarrow & & \downarrow \Sigma \\
 e & \xrightarrow{r} & c \times c
 \end{array}$$

を可換にする射 $\Sigma: c \times c \rightarrow c \times c$ に対して, 右の図式を可換にする射 $\sigma: e \rightarrow e$ が一意的に存在する.

(iii) $\langle e \times_c e, s_0, s_1 \rangle$ を r_0, r_1 の pullback

$$\begin{array}{ccc}
 e \times_c e & \xrightarrow{s_1} & e \\
 s_0 \downarrow & & \downarrow r_0 \\
 e & \xrightarrow{r_1} & c
 \end{array}$$

としたとき, 積の普遍性から得られる, 左の図式

$$\begin{array}{ccc}
 e & \xleftarrow{s_0} & e \times_c e & \xrightarrow{s_1} & e \\
 r_0 \downarrow & & \downarrow T & & \downarrow r_1 \\
 c & \xleftarrow{p_0} & c \times c & \xrightarrow{p_1} & c
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 e \times_c e & \xrightarrow{\tau} & e \\
 T \searrow & & \downarrow r \\
 & & c \times c
 \end{array}$$

を可換にする射 $T: e \times_c e \rightarrow c \times c$ に対して, 右の図式を可換にする射 $\tau: e \times_c e \rightarrow e$ が一意的に存在する.

証明. (1 \Rightarrow 2) $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は c 上の同値関係であるから, 図式

$$\begin{array}{ccc}
 & c & \\
 \text{id}_c \swarrow & \downarrow \delta & \searrow \text{id}_c \\
 c & e & c \\
 \xleftarrow{r_0} & & \xrightarrow{r_1}
 \end{array}$$

を可換にする射 $\delta: c \rightarrow e$ が存在する. 図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & c & & \\
 & & \downarrow \delta & & \\
 \text{id}_c \downarrow & & e & & \downarrow \text{id}_c \\
 & r_0 \swarrow & \downarrow r & \searrow r_1 & \\
 c & \xleftarrow{p_0} & c \times c & \xrightarrow{p_1} & c
 \end{array}$$

は可換であるから、積の普遍性により図式

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\delta} & e \\
 & \searrow \Delta & \downarrow r \\
 & & c \times c
 \end{array}$$

は可換である.

$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は c 上の同値関係であるから、図式

$$\begin{array}{ccc}
 & e & \\
 r_1 \swarrow & \downarrow \sigma & \searrow r_0 \\
 c & e & c \\
 r_0 \longleftarrow & & \longrightarrow r_1
 \end{array}$$

を可換にする射 $\sigma: e \rightarrow e$ が存在する. 図式

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & e & & & \\
 & \downarrow \sigma & & & \\
 & e & & & \\
 r_0 \swarrow & & \searrow r_1 & & \\
 c & c \times c & c & & \\
 r_1 \longleftarrow & & \longrightarrow p_1 & & \\
 & p_0 & & &
 \end{array}
 &
 &
 \begin{array}{ccccc}
 & e & & & \\
 & \downarrow r & & & \\
 & c \times c & & & \\
 r_1 \swarrow & & \searrow p_0 & & \\
 c & c \times c & c & & \\
 r_0 \longleftarrow & & \longrightarrow p_1 & & \\
 & p_0 & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

は可換であるから、積の普遍性により図式

$$\begin{array}{ccc}
 e & \xrightarrow{r} & c \times c \\
 \sigma \downarrow & & \downarrow \Sigma \\
 e & \xrightarrow{r} & c \times c
 \end{array}$$

は可換である.

$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は c 上の同値関係であるから、図式

$$\begin{array}{ccccc}
 e & \xleftarrow{s_0} & e \times_c e & \xrightarrow{s_1} & e \\
 r_0 \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow r_1 \\
 c & \xleftarrow{r_0} & e & \xrightarrow{r_1} & c
 \end{array}$$

を可換にする射 $\tau: e \times_c e \rightarrow e$ が存在する. 図式

$$\begin{array}{ccccc}
 e & \xleftarrow{s_0} & e \times_c e & \xrightarrow{s_1} & e \\
 \downarrow r_0 & & \downarrow \tau & & \downarrow r_1 \\
 e & & e & & e \\
 \swarrow r_0 & & \downarrow r & & \searrow r_1 \\
 c & \xleftarrow{p_0} & c \times c & \xrightarrow{p_1} & c \\
 & & & & \downarrow r_1
 \end{array}$$

は可換であるから, 積の普遍性により図式

$$\begin{array}{ccc}
 e \times_c e & \xrightarrow{\tau} & e \\
 \searrow T & & \downarrow r \\
 & & c \times c
 \end{array}$$

は可換である.

δ, σ, τ の一意性は r がモノ射であることから従う.

(2 \Rightarrow 1) $r_i = p_i \circ r$ ($i = 0, 1$) であることから従う. □

1.3 effective な同値関係

定義. $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を圏 C の対象 c 上の同値関係とする. r_0, r_1 の coequalizer $\langle u, q \rangle$ が存在し, $\langle r_0, r_1 \rangle$ が q の kernel pair となるとき, $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は effective であるという. □

例 9. Set における同値関係は effective である. $\langle R, r_0, r_1 \rangle$ を集合 X 上の同値関係とする. 一点集合 1 に対して R_1 は同値関係である.

$$S = \{ \langle r_0(u), r_1(u) \rangle \mid u \in R \}$$

とおく. 全単射 $X \cong \text{Hom}(1, X)$ から誘導される全単射 $S \cong R_1$ により, S が X 上の同値関係であることがわかる. q を自然な全射 $X \rightarrow X/S$ とする.

まず, $\langle X/S, q \rangle$ が r_0, r_1 の coequalizer となることを示す. $q \circ r_0 = q \circ r_1$ であることは明らか. A を集合, $s: X \rightarrow A$ を $s \circ r_0 = s \circ r_1$ をみたす写像とする. $x_0, x_1 \in X$ に対して $q(x_0) = q(x_1)$ とすると, $\langle x_0, x_1 \rangle \in S$ であるから $\langle r_0(v), r_1(v) \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle$ をみたす $v \in R$ が存在する. このとき

$$s(x_0) = s(r_0(v)) = s(r_1(v)) = s(x_1)$$

となる. 写像 $h: X/S \rightarrow A$ を $q(x) \mapsto s(x)$ で定めると, これは $h \circ q = s$ をみたす一意的な写像である.

$$\begin{array}{ccc}
 R & \begin{array}{c} \xrightarrow{r_0} \\ \xrightarrow{r_1} \end{array} & X & \xrightarrow{q} & X/S \\
 & & & \searrow s & \downarrow h \\
 & & & & A
 \end{array}$$

故に $\langle X/S, q \rangle$ は r_0, r_1 の coequalizer である.

$\langle r_0, r_1 \rangle$ が q の kernel pair であること, つまり図式

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{r_1} & X \\
 r_0 \downarrow & & \downarrow q \\
 X & \xrightarrow{q} & X/S
 \end{array}$$

が pullback であることを示す. 図式

$$\begin{array}{ccc}
 & & A & \xrightarrow{s_1} & X \\
 & & \downarrow k & & \downarrow q \\
 & & R & \xrightarrow{r_1} & X \\
 & & \downarrow r_0 & & \downarrow q \\
 & & X & \xrightarrow{q} & X/S \\
 & \swarrow s_0 & & & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

の外側が可換であるとし, $a \in A$ とする. このとき, $q(s_0(a)) = q(s_1(a))$ であるから $\langle s_0(a), s_1(a) \rangle \in S$ となる. 故に $\langle r_0(w), r_1(w) \rangle = \langle s_0(a), s_1(a) \rangle$ をみたす $w \in R$ が存在する. $\langle R, r_0, r_1 \rangle$ が X 上の関係であるから, このような w は一意的である. 写像 $k: A \rightarrow R$ を $a \mapsto w$ で定めると, これは $s_0 = r_0 \circ k, s_1 = r_1 \circ k$ をみたす一意的な写像である. 故に $\langle r_0, r_1 \rangle$ は q の kernel pair である. \square

例 10. 小圏 C 上の presheaf の圏 $\mathbf{PSh}(C)$ における極限や余極限は各点ごとに考えることができる. よって, $\mathbf{PSh}(C)$ における同値関係は effective である. \square

補題 11. $\langle r_0, r_1 \rangle$ を射 f_0, f_1 の pullback

$$\begin{array}{ccc}
 a \times_c b & \xrightarrow{r_1} & b \\
 r_0 \downarrow & & \downarrow f_0 \\
 a & \xrightarrow{f_1} & c
 \end{array}$$

とし、 a と b の積 $\langle a \times b, p_0, p_1 \rangle$ が存在するとする。積の普遍性から得られる、図式

$$\begin{array}{ccc}
 & a \times_c b & \\
 r_0 \swarrow & \vdots r & \searrow r_1 \\
 a & a \times b & b \\
 p_0 \longleftarrow & & \longrightarrow p_1
 \end{array}$$

を可換にする一意的な射を $r: a \times_c b \rightarrow a \times b$ としたとき、 $\langle a \times_c b, r \rangle$ は $f_0 \circ p_1, f_1 \circ p_0$ の equalizer である。

証明. $g_0 = f_0 \circ p_1, g_1 = f_1 \circ p_0$ とおく。図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & a \times_c b & & \\
 & r & \swarrow & \searrow & r \\
 a \times b & \xrightarrow{p_0} & a & & b \xleftarrow{p_1} a \times b \\
 & \searrow f_1 & & \swarrow f_0 & \\
 & & c & & \\
 g_1 & & & & g_0
 \end{array}$$

は可換である。 $s: d \rightarrow a \times b$ を $g_0 \circ s = g_1 \circ s$ をみたす射とする。このとき、pullback の普遍性から、図式

$$\begin{array}{ccccc}
 d & \xrightarrow{s} & a \times b & & \\
 \downarrow s & \dashrightarrow h & \downarrow p_1 & & \downarrow g_0 \\
 & & a \times_c b & \xrightarrow{r_1} & b \\
 & & \downarrow r_0 & & \downarrow f_0 \\
 a \times b & \xrightarrow{p_0} & a & \xrightarrow{f_1} & c \longleftarrow \\
 & & & & \uparrow g_1
 \end{array}$$

を可換にする射 $h: d \rightarrow a \times_c b$ が存在する。図式

$$\begin{array}{ccc}
 a \times b \xleftarrow{s} d \xrightarrow{s} a \times b & & a \times b \xleftarrow{s} d \xrightarrow{s} a \times b \\
 \downarrow p_0 & \downarrow h & \downarrow p_1 \\
 a \times_c b & & a \times_c b \\
 \downarrow r_0 & \downarrow r & \downarrow r_1 \\
 a \xleftarrow{p_0} a \times b \xrightarrow{p_1} b & & a \xleftarrow{p_0} a \times b \xrightarrow{p_1} b
 \end{array}$$

は可換であるから、積の普遍性により図式

$$\begin{array}{ccc} d & \xrightarrow{h} & a \times_c b \\ & \searrow s & \downarrow r \\ & & a \times b \end{array}$$

は可換である. $r \circ k = s$ をみたす射 $k: d \rightarrow a \times_c b$ が与えられたとき, 図式

$$\begin{array}{ccccc} a \times b & \xleftarrow{s} & d & \xrightarrow{s} & a \times b \\ p_0 \downarrow & \swarrow r & \downarrow k & \searrow r & \downarrow p_1 \\ a & \xleftarrow{r_0} & a \times b & \xrightarrow{r_1} & b \end{array}$$

は可換であるから, pullback の普遍性により $h = k$ が従う. □

系 12. $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を圏 C の対象 c 上の effective な同値関係とし, c の積 $\langle c \times c, p_0, p_1 \rangle$ が存在するとする. このとき, 積の普遍性から得られる, 図式

$$\begin{array}{ccccc} & & e & & \\ & \swarrow r_0 & \vdots r & \searrow r_1 & \\ c & \xleftarrow{p_0} & c \times c & \xrightarrow{p_1} & c \end{array}$$

を可換にする一意的な射 $r: e \rightarrow c \times c$ は正則モノ射である. □

例 13. 位相空間の圏 **Top** における同値関係は effective とは限らない. 二点集合 $X = \{0, 1\}$ の積 $X \times X$ の部分集合 Δ, C を

$$\Delta = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \}, \quad C = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle \}$$

で定める. X を密着空間とし, R を $X \times X$ に集合 $\{ \Delta, C \}$ が生成する位相を与えた空間とする. 写像 $r_i: R \rightarrow X$ を $\langle x_0, x_1 \rangle \mapsto x_i$ ($i = 0, 1$) で定める. r_0, r_1 は連続であり, $\langle R, r_0, r_1 \rangle$ は X 上の関係である. 写像 $\delta: X \rightarrow R$ を $x \mapsto \langle x, x \rangle$ で定めると, $\delta^{-1}(\Delta) = X, \delta^{-1}(C) = \emptyset$ であるから δ は連続であり, 図式

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow \text{id} & \downarrow \delta & \searrow \text{id} & \\ X & \xleftarrow{r_0} & R & \xrightarrow{r_1} & X \end{array}$$

は可換である. 写像 $\sigma: R \rightarrow R$ を $\langle x_0, x_1 \rangle \mapsto \langle x_1, x_0 \rangle$ で定めると, $\sigma^{-1}(\Delta) = \Delta$, $\sigma^{-1}(C) = C$ であるから σ は連続であり, 図式

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ r_1 \swarrow & \downarrow \sigma & \searrow r_0 \\ X & R & X \\ r_0 \longleftarrow & & \longrightarrow r_1 \end{array}$$

は可換である. $R \times_X R$ を積 $R \times R$ の部分空間

$$\{ \langle \langle x_{0,0}, x_{0,1} \rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1} \rangle \rangle \mid x_{0,1} = x_{1,0} \}$$

とし, 写像 $s_i: R \times_X R \rightarrow R$ を

$$\langle \langle x_{0,0}, x_{0,1} \rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1} \rangle \rangle \mapsto \langle x_{i,0}, x_{i,1} \rangle \quad (i = 0, 1)$$

で定めると, これは連続であり, $\langle R \times_X R, s_0, s_1 \rangle$ は r_0, r_1 の pullback である.

$$\begin{array}{ccc} R \times_X R & \xrightarrow{s_1} & R \\ s_0 \downarrow & & \downarrow r_0 \\ R & \xrightarrow{r_1} & X \end{array}$$

写像 $\tau: R \times_X R \rightarrow R$ を $\langle \langle x_{0,0}, x_{0,1} \rangle, \langle x_{1,0}, x_{1,1} \rangle \rangle \mapsto \langle x_{0,0}, x_{1,1} \rangle$ で定める.

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(\Delta) &= \{ \langle \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle \rangle, \langle \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle \rangle, \langle \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle \rangle, \langle \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \rangle \} \\ &= (s_0^{-1}(\Delta) \cap s_1^{-1}(\Delta)) \cup (s_0^{-1}(C) \cap s_1^{-1}(C)), \\ \tau^{-1}(C) &= \{ \langle \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle \rangle, \langle \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \rangle, \langle \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle \rangle, \langle \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle \rangle \} \\ &= (s_0^{-1}(\Delta) \cap s_1^{-1}(C)) \cup (s_0^{-1}(C) \cap s_1^{-1}(\Delta)) \end{aligned}$$

であるから τ は連続であり, 図式

$$\begin{array}{ccccc} R & \xleftarrow{s_0} & R \times_X R & \xrightarrow{s_1} & R \\ r_0 \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow r_1 \\ X & \xleftarrow{r_0} & R & \xrightarrow{r_1} & X \end{array}$$

は可換である. 故に $\langle R, r_0, r_1 \rangle$ は X 上の同値関係である. q を X から一点空間 1 への一意的な連続写像とすると, $\langle 1, q \rangle$ は r_0, r_1 の coequalizer である. $\langle X \times X, p_0, p_1 \rangle$ を密着

空間 X の積とする. q の kernel pair は $\langle p_0, p_1 \rangle$ である. $X \times X$ と R は同型でないから r_0, r_1 は q の kernel pair でない. 故に, 密着空間 X 上の同値関係 $\langle R, r_0, r_1 \rangle$ は effective でない. \square

補題 14. $\langle r_0, r_1 \rangle$ を射 $f: a \rightarrow b$ の kernel pair とし, r_0, r_1 の coequalizer $\langle u, q \rangle$ が存在するとする. このとき, $\langle r_0, r_1 \rangle$ は q の kernel pair である.

$$\begin{array}{ccc} e & \begin{array}{c} \xrightarrow{r_0} \\ \xrightarrow{r_1} \end{array} & a & \xrightarrow{q} & u \\ & & \downarrow f & & \\ & & b & & \end{array}$$

証明. $f \circ r_0 = f \circ r_1$ であるから, coequalizer の普遍性により図式

$$\begin{array}{ccc} e & \begin{array}{c} \xrightarrow{r_0} \\ \xrightarrow{r_1} \end{array} & a & \xrightarrow{q} & u \\ & & \downarrow f & \swarrow h & \\ & & b & & \end{array}$$

を可換にする射 $h: u \rightarrow b$ が存在する. $s_0, s_1: v \rightarrow a$ を $q \circ s_0 = q \circ s_1$ をみたす射とする.

$$\begin{array}{ccccc} & & v & & \\ & \swarrow k & \downarrow s_1 & & \\ & e & \downarrow s_0 & & \\ & \swarrow r_0 & a & \xrightarrow{q} & u \\ & \downarrow r_1 & \downarrow f & \swarrow h & \\ & & b & & \end{array}$$

このとき

$$f \circ s_0 = h \circ q \circ s_0 = h \circ q \circ s_1 = f \circ s_1$$

であるから, pullback の普遍性により

$$r_0 \circ k = s_0, \quad r_1 \circ k = s_1$$

をみたす射 $k: v \rightarrow e$ が一意に存在する. \square

例 15. 射 $s: a \rightarrow b$ の kernel pair $\langle r_0, r_1 \rangle$ が coequalizer $\langle u, q \rangle$ をもつとする.

$$\begin{array}{ccc} e & \begin{array}{c} \xrightarrow{r_0} \\ \xrightarrow{r_1} \end{array} & a & \xrightarrow{q} & u \\ & & \downarrow s & & \\ & & b & & \end{array}$$

このとき、 $\langle r_0, r_1 \rangle$ は q の kernel pair であるから $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は effective である。□

1.4 表現可能関手としての同値関係

定義. $P, Q: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ を関手とする。任意の $a \in C$ に対して、 $Q(a) \subseteq P(a)$ であり、包含写像 $Q(a) \rightarrow P(a)$ が a について自然であるとき、 Q を P の部分関手と呼び、 $Q \subseteq P$ で表す。□

C を圏、 c を C の対象とする。関手 $H_c: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ を

- C の対象 a に対して $H_c(a) = \text{Hom}(a, c) \times \text{Hom}(a, c)$,
- C の射 $f: a \rightarrow b$ に対して

$$H_c(f): H_c(b) \rightarrow H_c(a), \quad \langle k_0, k_1 \rangle \mapsto \langle k_0 \circ f, k_1 \circ f \rangle$$

で定める。もし C が c の積 $c \times c$ をもつならば、 $H_c \cong \text{Hom}(-, c \times c)$ である。 C の射 $r_0, r_1: e \rightarrow c$ に対して、 H_c の部分関手 $R_{\langle r_0, r_1 \rangle}: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ を

- C の対象 a に対して $R_{\langle r_0, r_1 \rangle}(a) = \{ \langle r_0 \circ k, r_1 \circ k \rangle \mid k \in \text{Hom}(a, e) \}$

で定める。写像 $\theta_a: \text{Hom}(a, e) \rightarrow R_{\langle r_0, r_1 \rangle}(a)$ を $f \mapsto \langle r_0 \circ f, r_1 \circ f \rangle$ で定める。定義から、 θ_a は全射であり、 $\theta = \langle \theta_a \rangle_{a \in C}$ は自然変換 $\text{Hom}(-, e) \Rightarrow R_{\langle r_0, r_1 \rangle}$ である。

命題 16. 圏 C の射 $r_0, r_1: e \rightarrow c$ に対して、以下は同値である：

- (1) $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は c 上の関係である。
- (2) 任意の $a \in C$ に対して θ_a は単射である。□

故に以下が従う。

命題 17. 圏 C の対象 c 上の同値関係 $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ に対して、部分関手 $R_{\langle r_0, r_1 \rangle} \subseteq H_c$ は以下をみたす：

- (1) $R_{\langle r_0, r_1 \rangle} \cong \text{Hom}(-, e)$.
- (2) 任意の $a \in C$ に対して $R_{\langle r_0, r_1 \rangle}(a)$ は $\text{Hom}(a, c)$ 上の同値関係である。□

逆に、このような性質をもつ部分関手 R から同値関係 $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を得ることができ、 R が $R_{\langle r_0, r_1 \rangle}$ の形をしていることがわかる。

命題 18. C を圏, c を C の対象とし, 部分関手 $R \subseteq H_c$ が以下をみたしているとする.

- (1) R は表現可能関手である.
- (2) 任意の $a \in C$ に対して $R(a)$ は $\text{Hom}(a, c)$ 上の同値関係である.

このとき, c 上の同値関係 $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ で $R = R_{\langle r_0, r_1 \rangle}$ をみたすものが存在する.

証明. R が表現可能関手であるから, 対象 $e \in C$ と同型 $\kappa: \text{Hom}(-, e) \Rightarrow R$ が存在する.

$\kappa_e(\text{id}_e) = \langle r_0, r_1 \rangle$ とおく.

$f \in \text{Hom}(a, e)$ に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(e, e) & \xrightarrow{\kappa_e} & R(e) \\
 \downarrow - \circ f & & \downarrow R(f) \\
 \text{Hom}(a, e) & \xrightarrow{\kappa_a} & R(a)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{id} & \xrightarrow{\kappa_e} & \langle r_0, r_1 \rangle \\
 \downarrow - \circ f & & \downarrow R(f) \\
 f & \xrightarrow{\kappa_a} & \langle r_0 \circ f, r_1 \circ f \rangle \\
 & & \parallel \\
 & & \kappa_a(f)
 \end{array}$$

は可換であるから $\kappa_a(f) = \langle r_0 \circ f, r_1 \circ f \rangle$ が従う.

射 $h, k: a \rightarrow e$ で

$$r_0 \circ h = r_0 \circ k, \quad r_1 \circ h = r_1 \circ k$$

をみたすものに対して

$$\kappa_a(h) = \langle r_0 \circ h, r_1 \circ h \rangle = \langle r_0 \circ k, r_1 \circ k \rangle = \kappa_a(k)$$

であり, κ_a が単射であるから $h = k$ が従う. 故に $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は c 上の関係である.

$w \in R(a)$ とする. κ_a が全射であるから, $\kappa_a(g) = w$ をみたす $g \in \text{Hom}(a, e)$ が存在する. よって

$$w = \kappa_a(g) = \langle r_0 \circ g, r_1 \circ g \rangle \in R_{\langle r_0, r_1 \rangle}(a)$$

となり, $R(a) \subseteq R_{\langle r_0, r_1 \rangle}(a)$ が従う.

R が H_c の部分関手であり, $\langle r_0, r_1 \rangle \in R(e)$ であるから, 任意の $f \in \text{Hom}(a, e)$ に対して $\langle r_0 \circ f, r_1 \circ f \rangle = (R(f))(\langle r_0, r_1 \rangle) \in R(a)$ となり, $R_{\langle r_0, r_1 \rangle}(a) \subseteq R(a)$ が従う.

任意の $a \in C$ に対して, $R_{\langle r_0, r_1 \rangle}(a) = R(a)$ であり, $R(a)$ が $\text{Hom}(a, c)$ 上の同値関係であるから, $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ は $R_{\langle r_0, r_1 \rangle} = R$ をみたす同値関係である. \square

1.5 internal groupoid としての同値関係

定義. C を pullback をもつ圏とする. C の対象と射

$$c_2 \xrightarrow{m} c_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{n} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} c_0$$

からなる組 $\langle c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, m, n \rangle$ で以下をみたすものを, C における internal category という.

(G1) c_2 は d_0, d_1 の pullback である. $\langle c_2, f_0, f_1 \rangle$ が d_0, d_1 の pullback であるとする.

$$\begin{array}{ccc} c_2 & \xrightarrow{f_0} & c_1 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow d_1 \\ c_1 & \xrightarrow{d_0} & c_0 \end{array}$$

(G2) 図式

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \xrightarrow{n} & c_1 \\ \text{id} \searrow & & \downarrow d_0 \\ & & c_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} c_0 & \xrightarrow{n} & c_1 \\ \text{id} \searrow & & \downarrow d_1 \\ & & c_0 \end{array}$$

は可換である.

(G3) 図式

$$\begin{array}{ccc} c_2 & \xrightarrow{m} & c_1 \\ f_0 \downarrow & & \downarrow d_0 \\ c_1 & \xrightarrow{d_0} & c_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} c_2 & \xrightarrow{m} & c_1 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow d_1 \\ c_1 & \xrightarrow{d_1} & c_0 \end{array}$$

は可換である.

(G4) (G2) から, 図式

$$\begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{d_1} & c_0 & \xrightarrow{n} & c_1 \\ \text{id} \downarrow & & \text{id} \searrow & & \downarrow d_0 \\ c_1 & \xrightarrow{d_1} & c_0 & & c_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{d_0} & c_0 & \xrightarrow{n} & c_1 \\ \text{id} \downarrow & & \text{id} \searrow & & \downarrow d_1 \\ c_1 & \xrightarrow{d_0} & c_0 & & c_0 \end{array}$$

は可換であり, pullback の普遍性から, 図式

$$\begin{array}{ccc}
 c_1 & \xrightarrow{\text{id}} & c_1 \\
 \downarrow d_1 & \searrow \scriptstyle (\text{id}_{n \circ d_1}) & \downarrow \\
 c_2 & \xrightarrow{f_0} & c_1 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow d_1 \\
 c_0 & \xrightarrow{n} c_1 \xrightarrow{d_0} & c_0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 c_1 & \xrightarrow{d_0} & c_0 \\
 \downarrow \text{id} & \searrow \scriptstyle (n \circ d_0) & \downarrow n \\
 c_2 & \xrightarrow{f_0} & c_1 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow d_1 \\
 c_1 & \xrightarrow{d_0} & c_0
 \end{array}$$

を可換にする射 $(\text{id}_{n \circ d_1}), (n \circ d_0) : c_1 \rightarrow c_2$ を得る. これらの射について, 図式

$$\begin{array}{ccc}
 c_1 & \xrightarrow{\scriptstyle (\text{id}_{n \circ d_1})} & c_2 \\
 \searrow \text{id} & & \downarrow m \\
 & & c_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 c_1 & \xrightarrow{\scriptstyle (n \circ d_0)} & c_2 \\
 \searrow \text{id} & & \downarrow m \\
 & & c_1
 \end{array}$$

は可換である.

(G5) $\langle c_3, g_0, g_1 \rangle$ を f_0, f_1 の pullback とする.

$$\begin{array}{ccc}
 c_3 & \xrightarrow{g_0} & c_2 \\
 g_1 \downarrow & & \downarrow f_1 \\
 c_2 & \xrightarrow{f_0} & c_1
 \end{array}$$

G1, G3 から, 図式

$$\begin{array}{ccc}
 c_3 & \xrightarrow{g_0} & c_2 & \xrightarrow{f_0} & c_1 \\
 g_1 \downarrow & & f_1 \downarrow & \text{(G1)} & \downarrow d_1 \\
 c_2 & \xrightarrow{f_0} & c_1 & \xrightarrow{d_0} & c_0 \\
 \searrow m & \text{(G3)} & \nearrow d_0 & & \\
 & & c_1 & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 c_3 & \xrightarrow{g_1} & c_2 & \xrightarrow{f_1} & c_1 \\
 g_0 \downarrow & & f_0 \downarrow & \text{(G1)} & \downarrow d_0 \\
 c_2 & \xrightarrow{f_1} & c_1 & \xrightarrow{d_1} & c_0 \\
 \searrow m & \text{(G3)} & \nearrow d_1 & & \\
 & & c_1 & &
 \end{array}$$

は可換であり, pullback の普遍性から, 図式

$$\begin{array}{ccc}
 c_3 & \xrightarrow{g_0} & c_2 \\
 \downarrow g_1 & \searrow \scriptstyle (f_0 \circ g_0) & \downarrow f_0 \\
 c_2 & \xrightarrow{f_0} & c_1 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow d_1 \\
 c_2 & \xrightarrow{m} c_1 \xrightarrow{d_0} & c_0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 c_3 & \xrightarrow{g_0} & c_2 \\
 \downarrow g_1 & \searrow \scriptstyle (m \circ g_0) & \downarrow m \\
 c_2 & \xrightarrow{f_0} & c_1 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow d_1 \\
 c_2 & \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{d_0} & c_0
 \end{array}$$

を可換にする射 $(f_0 \circ g_0), (m \circ g_1): c_3 \rightarrow c_2$ を得る. これらの射について, 図式

$$\begin{array}{ccc} c_3 & \xrightarrow{(f_0 \circ g_0)} & c_2 \\ (m \circ g_1) \downarrow & & \downarrow m \\ c_2 & \xrightarrow{m} & c_1 \end{array}$$

は可換である. □

例 19. **Set** における internal category は小圏である. □

定義. C を pullback をもつ圏, $\langle c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, m, n \rangle$ を C の internal category とする. この組に次をみたす射 $\tau: c_1 \rightarrow c_1$ を加えたものを, internal groupoid という.

$$\begin{array}{ccc} & \tau & \\ & \curvearrowright & \\ c_2 & \xrightarrow{m} c_1 & \xrightarrow{d_0} c_0 \\ & & \xleftarrow{n} \\ & & \xrightarrow{d_1} \end{array}$$

(G6) 図式

$$\begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{\tau} & c_1 \\ & \searrow & \downarrow d_0 \\ & & c_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{\tau} & c_1 \\ & \searrow & \downarrow d_1 \\ & & c_0 \end{array}$$

は可換である.

(G7) G6 と pullback の普遍性から,

$$\begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{\text{id}} & c_1 \\ \tau \downarrow & \searrow & \downarrow d_1 \\ c_2 & \xrightarrow{f_0} & c_1 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow d_1 \\ c_1 & \xrightarrow{d_0} & c_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{\tau} & c_1 \\ \text{id} \downarrow & \searrow & \downarrow d_1 \\ c_2 & \xrightarrow{f_0} & c_1 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow d_1 \\ c_1 & \xrightarrow{d_0} & c_0 \end{array}$$

を可換にする射 $(\text{id}_\tau), (\tau_{\text{id}}): c_1 \rightarrow c_2$ を得る. これらの射について, 図式

$$\begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{(\text{id}_\tau)} & c_2 \\ d_0 \downarrow & & \downarrow m \\ c_0 & \xrightarrow{n} & c_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{(\tau_{\text{id}})} & c_2 \\ d_1 \downarrow & & \downarrow m \\ c_0 & \xrightarrow{n} & c_1 \end{array}$$

は可換である.

□

命題 20. C を pullback をもつ圏, $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ を C の対象 c 上の同値関係とし, $\langle c_2, s_0, s_1 \rangle$ を r_0, r_1 の pullback とする.

$$\begin{array}{ccc} c_2 & \xrightarrow{s_1} & e \\ s_0 \downarrow & & \downarrow r_0 \\ e & \xrightarrow{r_1} & c \end{array}$$

$\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が同値関係であるから, 図式

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ \text{id}_c \swarrow & \downarrow \delta & \searrow \text{id}_c \\ c & \xleftarrow{r_0} e \xrightarrow{r_1} & c \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & e & \\ r_1 \swarrow & \downarrow \sigma & \searrow r_0 \\ c & \xleftarrow{r_0} e \xrightarrow{r_1} & c \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & e & \xleftarrow{s_0} & c_2 & \xrightarrow{s_1} & e \\ r_0 \downarrow & & & \downarrow \tau & & \downarrow r_1 \\ c & \xleftarrow{r_0} & e & \xrightarrow{r_1} & c \end{array}$$

を可換にする一意的な射 δ, σ, τ を得る. このとき, $\langle c, e, c_2, r_0, r_1, \tau, \delta, \sigma \rangle$ は internal groupoid である.

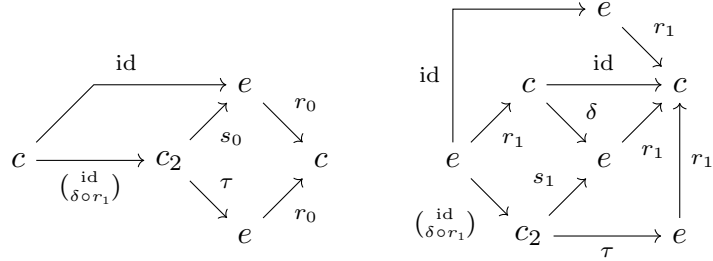
$$c_2 \xrightarrow{\tau} e \begin{array}{c} \sigma \\ \circlearrowleft \\ \xrightarrow{r_0} \\ \xleftarrow{\delta} \\ \xrightarrow{r_1} \end{array} c$$

証明. **G1** は $\langle c_2, s_0, s_1 \rangle$ が pullback であることから, **G2, G3, G6** は δ, τ, σ のとり方から従う.

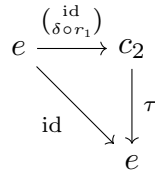
(**G4**) pullback の普遍性から, 図式

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{\text{id}} & e \\ \downarrow r_1 & \searrow (\text{id}_{\delta \circ r_1}) & \downarrow r_1 \\ c_2 & \xrightarrow{s_0} & e \\ s_1 \downarrow & & \downarrow r_1 \\ c & \xrightarrow{\delta} e \xrightarrow{r_0} & c \end{array} \quad \begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{r_0} & c \\ \downarrow \text{id} & \searrow (\delta \circ r_0) & \downarrow \delta \\ c_2 & \xrightarrow{s_0} & e \\ s_1 \downarrow & & \downarrow r_1 \\ e & \xrightarrow{r_0} & c \end{array}$$

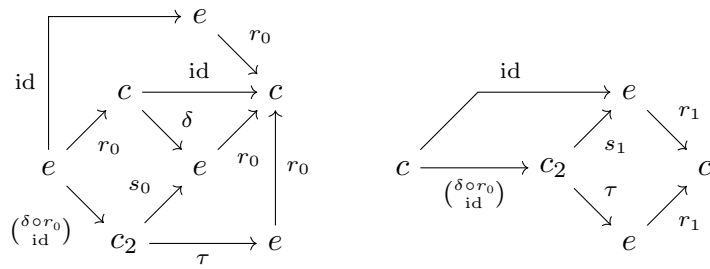
を可換にする射 $(\begin{smallmatrix} \text{id} \\ \delta \circ r_1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} \delta \circ r_0 \\ \text{id} \end{smallmatrix}) : e \rightarrow c_2$ を得る. 図式



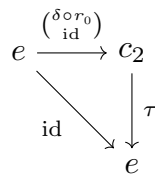
は可換であり, $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が関係であるから, 図式



は可換である. 同様に, 図式

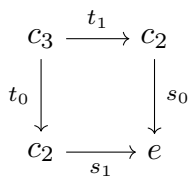


は可換であり, $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が関係であるから, 図式

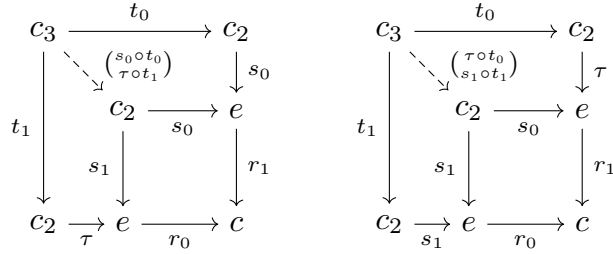


は可換である.

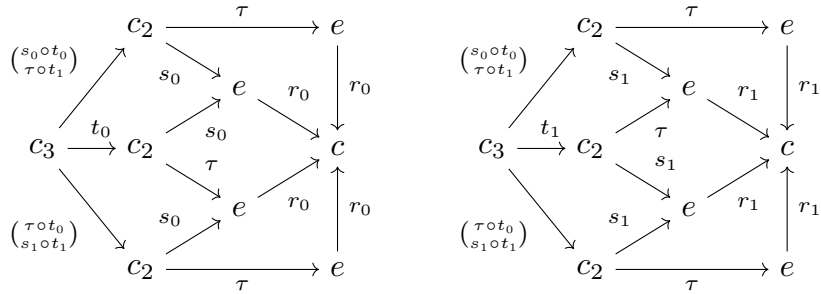
(G5) $\langle c_3, t_0, t_1 \rangle$ を s_0, s_1 の pullback とする.



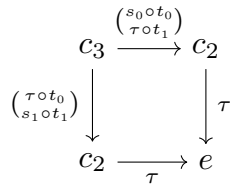
pullback の普遍性から, 図式



を可換にする射 $(\begin{smallmatrix} s_0 o t_0 \\ \tau o t_1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} \tau o t_0 \\ s_1 o t_1 \end{smallmatrix}): C_3 \rightarrow C_2$ を得る. 図式

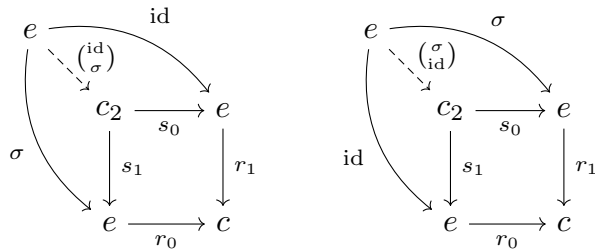


は可換であり, $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が関係であるから, 図式

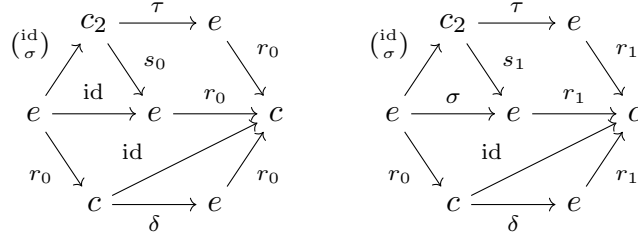


は可換である.

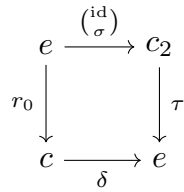
(G7) pullback の普遍性から,



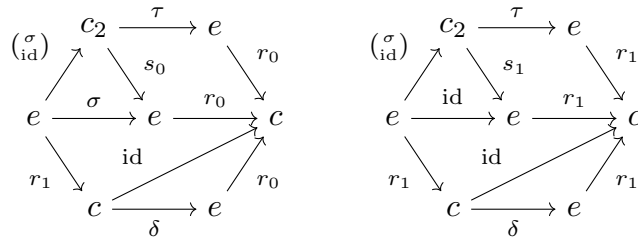
を可換にする射 $(\text{id}, \binom{\text{id}}{\sigma}): e \rightarrow c_2$ を得る. 図式



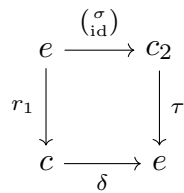
は可換であり, $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が関係であるから, 図式



は可換である. 同様に, 図式



は可換であり, $\langle e, r_0, r_1 \rangle$ が関係であるから, 図式



は可換である. □

internal groupoid の定義から, 直ちに以下が従う.

命題 21. C を pullback をもつ圏, $\langle c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, m, n, \tau \rangle$ を C の internal groupoid とする. $\langle c_1, d_0, d_1 \rangle$ が c_0 上の関係ならば, これは同値関係である. □

例 22. $\langle R, r_0, r_1 \rangle$ を \mathbf{Set} の対象 X 上の同値関係とし, $\langle R \times_X R, s_0, s_1 \rangle$ を r_0, r_1 の pullback とする.

$$\begin{array}{ccc} R \times_X R & \xrightarrow{s_1} & R \\ s_0 \downarrow & & \downarrow r_0 \\ R & \xrightarrow{r_1} & X \end{array}$$

このとき, 図式

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \text{id} \swarrow & \downarrow \delta & \searrow \text{id} \\ X & \xleftarrow{r_0} R \xrightarrow{r_1} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & R & \\ r_1 \swarrow & \downarrow \sigma & \searrow r_0 \\ X & \xleftarrow{r_0} R \xrightarrow{r_1} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} R & \xleftarrow{s_0} R \times_X R \xrightarrow{s_1} & R \\ r_0 \downarrow & \downarrow \tau & \downarrow r_1 \\ X & \xleftarrow{r_0} R \xrightarrow{r_1} & X \end{array}$$

を可換にする一意的な射 δ, σ, τ を得る. 小圏 C を

- $\text{Ob}(C) = X$,
- $\text{Mor}(C) = R$,
- $f \in R$ に対して $\text{dom}(f) = r_0(f), \text{cod}(f) = r_1(f)$,
- $w \in R \times_X R$ に対して $s_1(w) \circ s_0(w) = \tau(w)$,
- $x \in X$ に対して $\text{id}_x = \delta(x)$

で定め, $x, y \in X$ に対して

$$\text{Hom}(x, y) = \{ f \in \text{Mor}(C) \mid r_0(f) = x, r_1(f) = y \}$$

とおく. $\langle R, r_0, r_1 \rangle$ が関係であるから, 任意の $x, y \in X$ に対して $|\text{Hom}(x, y)| \leq 1$ である. 特に, 任意の $x \in X$ に対して $|\text{Hom}(x, x)| = 1$ である. $f \in \text{Hom}(x, y)$ に対して, $\sigma(f) \in \text{Hom}(y, x)$ であり, $\sigma(f) \circ f = \text{id}_x, f \circ \sigma(f) = \text{id}_y$ である. 故に C は, 任意の射が同型射であり, 任意の Hom 集合が高々一つの射をもつ小圏である.

特に, 例 1 や例 7 で定義した集合や写像を用いると, 小圏 C は

- $\text{Ob}(C) = X$,
- $\text{Mor}(C) = R$,
- $\langle x, y \rangle \in R$ に対して $\text{dom}(\langle x, y \rangle) = x, \text{cod}(\langle x, y \rangle) = y$,
- $\langle \langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \rangle \in R \times_X R$ に対して $\langle y, z \rangle \circ \langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$,
- $x \in X$ に対して $\text{id}_x = \langle x, x \rangle$

であり, $x, y \in X$ に対して

$$\mathrm{Hom}(x, y) = \begin{cases} \{ \langle x, y \rangle \} & \langle x, y \rangle \in R \\ \emptyset & \langle x, y \rangle \notin R \end{cases}$$

である. □

参考文献

- [Bor94a] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1*, Vol. 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994.
- [Bor94b] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2*, Vol. 51 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994.
- [nLa23] nLab authors. congruence. <https://ncatlab.org/nlab/show/congruence>, December 2023. [Revision 34](#).