# 可分距離空間はパラコンパクトである

@hyutw*

2021 年 12 月 14 日

以下，ことわりがない限り選択公理を仮定せず，公理系 ZF で考えているものとする．正の整数全体の集合を $\mathbf{Z}_+$ で表す．

**定義.** $X$ を集合，$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ を $X$ の部分集合族とする．$\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ を細分する，あるいは $\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の細分であるとは，任意の $V \in \mathcal{V}$ に対してある $U \in \mathcal{U}$ が存在して $V \subseteq U$ をみたすことをいう．

**定義.** $X$ を位相空間，$\mathcal{U}$ を $X$ の部分集合族とする．$\mathcal{U}$ が $X$ で局所有限であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して $x$ のある近傍 $V$ が存在し，$\{ U \in \mathcal{U} \mid U \cap V \neq \emptyset \}$ が有限集合となることをいう．

**定義.** 位相空間 $X$ の任意の開被覆が局所有限な開被覆によって細分されるとき，$X$ はパラコンパクトであるという．

$\langle X, \rho \rangle$ を距離空間とする．中心 $x \in X$, 半径 $r > 0$ の開球を $B(x, r)$ で表す：

$$B(x, r) = \{ y \in X \mid \rho(x, y) < r \}.$$

**命題 1.** $\langle X, \rho \rangle$ を距離空間，$\mathcal{C}$ を $X$ の整列可能な開被覆とする．このとき $\mathcal{C}$ は局所有限な開被覆によって細分される．

**証明.** $\leq_{\mathcal{C}}$ を $\mathcal{C}$ 上の整列順序とする．$C \in \mathcal{C}$ と $n \in \mathbf{Z}_+$ に対して，集合 $A_{C,n}$, $D_{C,n}$ を以下のように，$n$ に関して帰納的に定める：$A_{C,n}$ は条件

(1) $C = \min \{ C' \in \mathcal{C} \mid x \in C' \}$,
(2) $\forall C' \in \mathcal{C} \, (\forall j < n \, (x \notin D_{C',j}))$,

---

* Twitter: https://twitter.com/hyutw.

(3) $B(x, 3\cdot 2^{-n}) \subseteq C$

をみたす $x \in X$ 全体の集合，

$$D_{C,n} = \bigcup_{x \in A_{C,n}} B\bigl(x, 2^{-n}\bigr).$$

$\mathcal{D} = \{\, D_{C,n} \mid C \in \mathcal{C}, n > 0 \,\}$ とおく．明らかに $\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ の細分である．$x \in X$ とする．$\mathcal{C}$ は $X$ の整列可能な開被覆であるから $x \in C_0$ なる最小の $C_0 \in \mathcal{C}$ が存在する．条件 3 をみたす $n$ を取る．ここで $\forall C \in \mathcal{C}\,(\forall j \leq n\,(x \notin D_{C,j}))$ と仮定すると，特に条件 2 をみたすから $x \in A_{C_0,n} \subseteq D_{C_0,n}$ となるが，これは仮定に反する．したがって $x \in D_{C,j}$ をみたす $C \in \mathcal{C}$, $j < n$ が存在する．故に $\mathcal{D}$ は $X$ の開被覆である．

$\mathcal{D}$ が局所有限であることを示す. $x \in X$ とし, $C_1 = \min\{\, C \in \mathcal{C} \mid \exists n > 0\,(x \in D_{C,n}) \,\}$ とおき，$x \in D_{C_1,n}$ をみたす $n$ を取る．$B\bigl(x, 2^{-j}\bigr) \subseteq D_{C_1,n}$ となるように $j$ を取る．以下が成り立つことを示す：

(a) $i \geq n + j$ ならば $B\bigl(x, 2^{-(n+j)}\bigr)$ は任意の $C \in \mathcal{C}$ で $D_{C,i}$ と交わらない.
(b) $i < n + j$ ならば $B\bigl(x, 2^{-(n+j)}\bigr)$ は高々一つの $C \in \mathcal{C}$ で $D_{C,i}$ と交わる.

まず a を証明する．$i > n$ であるから，条件 2 によって $D_{C,i}$ の定義に使われている半径 $2^{-i}$ の開球の中心 $y$ は $D_{C_1,n}$ の外にある：$\forall y \in A_{C,i}\,(y \notin D_{C_1,n})$. $B\bigl(x, 2^{-j}\bigr) \subseteq D_{C_1,n}$ 故 $\rho(x,y) \geq 2^{-j}$ である．$i \geq j+1$ であるから $2^{-i} \leq 2^{-(j+1)}$ となり，$n + j \geq j + 1$ であるから $2^{-(n+j)} \leq 2^{-(j+1)}$ となる．よって

$$\begin{aligned} 2^{-(n+j)} + 2^{-i} &\leq 2^{-(j+1)} + 2^{-(j+1)} \\ &= 2^{-(j+1)+1} \\ &= 2^{-j} \end{aligned}$$

であるから $B\bigl(x, 2^{-(n+j)}\bigr) \cap B\bigl(y, 2^{-i}\bigr) = \emptyset$ となる．よって $B\bigl(x, 2^{-(n+j)}\bigr) \cap D_{C,i} = \emptyset$ が従う.

次に b を証明する．$p \in D_{C,i}$, $q \in D_{C',i}$, $C <_{\mathcal{C}} C'$ ならば $\rho(p,q) > 2^{-(n+j)+1}$ となることを示せばよい.

$\because$) ある $C \in \mathcal{C}$ で $B\bigl(x, 2^{-(n+j)}\bigr) \cap D_{C,i} \neq \emptyset$ が成り立つとし，そのような $C \in \mathcal{C}$ で最小のものを $C_2$ とする：

$$C_2 = \min\left\{\, C \in \mathcal{C} \;\middle|\; B\Bigl(x, 2^{-(n+j)}\Bigr) \cap D_{C,i} \neq \emptyset \,\right\}.$$

$p \in B\big(x, 2^{-(n+j)}\big) \cap D_{C_2,i}$ とする. $C' \in \mathcal{C}$ が $C_2 <_{\mathcal{C}} C'$ をみたしているとし, $q \in D_{C',i}$ とする. このとき $\rho(p,q) > 2^{-(n+j)+1}$ であるから $B\big(x, 2^{-(n+j)}\big) \cap D_{C',i} = \emptyset$ となる.

$p \in D_{C,i}$, $q \in D_{C',i}$, $C <_{\mathcal{C}} C'$ とする. $p \in B\big(y, 2^{-i}\big)$, $q \in B\big(z, 2^{-i}\big)$ なる点 $y \in A_{C,i}$, $z \in A_{C',i}$ が存在する. 条件 3 より $B\big(y, 3 \cdot 2^{-i}\big) \subseteq C$ である. 条件 1 より $z \notin C$ である. よって $\rho(y,z) \geq 3 \cdot 2^{-i}$ となり, $\rho(p,q) > 2^{-i} \geq 2^{-(n+j)+1}$ がわかる. □

**命題 2.** 整列可能稠密部分集合をもつ距離空間はパラコンパクトである.

**証明.** $\langle X, \rho \rangle$ を距離空間, $\mathcal{U}$ を $X$ の開被覆, $E$ を整列可能稠密部分集合とする. $y \in E$ に対して

$$n_y = \min \left\{\, n \in \mathbf{Z}_+ \;\middle|\; \exists U \in \mathcal{U}\, \left(B\big(y, \tfrac{1}{n}\big) \subseteq U\right) \right\}$$

とおき,

$$\mathcal{V} = \left\{\, B\Big(y, \tfrac{1}{n_y}\Big) \;\middle|\; y \in E \right\}$$

とおく. 明らかに $\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の細分である. $\mathcal{V}$ が $X$ の開被覆であることを示す. $x \in X$ とする. $\mathcal{U}$ は $X$ の開被覆故

$$\exists U \in \mathcal{U}\, \left(\exists n \in \mathbf{Z}_+\, \left(B\big(x, \tfrac{1}{n}\big) \subseteq U\right)\right)$$

となる. $E$ は $X$ において稠密であるから $B\big(x, \frac{1}{2n}\big) \cap E \neq \emptyset$ となる. $y \in B\big(x, \frac{1}{2n}\big) \cap E$ を取る. このとき

$$x \in B\big(y, \tfrac{1}{2n}\big) \subseteq B\big(x, \tfrac{1}{n}\big) \subseteq U$$

である.

$\because$) $z \in B\big(y, \frac{1}{2n}\big)$ とする.

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) < \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} = \tfrac{1}{n}$$

であるから $z \in B\big(x, \frac{1}{n}\big)$ となる.

$n_y$ の取り方から $x \in B\big(y, \frac{1}{2n}\big) \subseteq B\Big(y, \frac{1}{n_y}\Big)$ となる. 故に $\mathcal{V}$ は $X$ の開被覆である. また $E$ が整列可能であるから $\mathcal{V}$ は整列可能である. 命題 1 より $\mathcal{V}$ を細分する局所有限な開被覆 $\mathcal{W}$ が存在する. $\mathcal{W}$ は $\mathcal{U}$ の細分である. □

**系 3.** 可分距離空間はパラコンパクトである. □

# 参考文献

[1] C. Good and I. J. Tree. *Continuing horrors of topology without choice.* Topology and its Applications, Vol. 63, No. 1, pp. 79–90, 1995.

[2] Mary Ellen Rudin. *A new proof that metric spaces are paracompact.* Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 20, No. 2, p. 603, 1969.