

Wallman コンパクト化*

ゆう†

2022 年 12 月 7 日

目次

1	ultrafilter	1
2	Wallman コンパクト化	4
2.1	定義と性質	4
2.2	Hausdorff 性	10
2.3	Stone-Čech コンパクト化との関係	12

1 ultrafilter

X を集合とする. 冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 \mathcal{S} について, \mathcal{S} の有限個の元の共通部分が空でないとき, \mathcal{S} は有限交差性をもつという. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を有限個の元の共通部分について閉じている部分集合とする. (0 個の共通部分として $X \in \mathcal{E}$ である.) \mathcal{E} の部分集合 \mathcal{F} で次をみたすものを (X 上の) \mathcal{E} -filter という:

- (1) $\emptyset \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$.
- (2) $F, F' \in \mathcal{F}$ ならば $F \cap F' \in \mathcal{F}$.
- (3) $F \in \mathcal{F}, F' \in \mathcal{E}, F \subseteq F'$ ならば $F' \in \mathcal{F}$.

* 本稿は Math Advent Calendar 2022 (<https://adventar.org/calendars/7662>) の 7 日目の記事です.

† <https://yuu7269.github.io/notes>.

\mathcal{E} -filter 全体の集合は包含関係により順序集合となり、この集合の極大元を \mathcal{E} -ultrafilter という。 \mathcal{E} -filter や \mathcal{E} -ultrafilter を単に filter, ultrafilter ということもある。定義から filter は有限交差性をもつ。有限交差性をもつ空でない部分集合 $S \subseteq \mathcal{E}$ に対して、 S の有限個の元の共通部分全体の集合を \mathcal{H} とし、

$$\mathcal{F} = \{ F \in \mathcal{E} \mid \exists H \in \mathcal{H} (H \subseteq F) \}$$

とすると、 \mathcal{F} は filter である。このことから次が成り立つ。

命題 1. 有限交差性をもつ部分集合 $S \subseteq \mathcal{E}$ が ultrafilter \mathcal{F} を含むとき、 $S = \mathcal{F}$ である。 \square

命題 2. $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ を \mathcal{E} -ultrafilter とする。このとき次が成り立つ。

- (1) $A \in \mathcal{E}$ について、任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $A \cap F \neq \emptyset$ ならば $A \in \mathcal{F}$ である。
- (2) $A, A' \in \mathcal{E}$, $A \cup A' \in \mathcal{F}$ ならば、 $A \in \mathcal{F}$ または $A' \in \mathcal{F}$ である。
- (3) $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$ ならば、 $F \cap F' = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{F}$, $F' \in \mathcal{F}'$ が存在する。

証明. (1) $\mathcal{F} \cup \{A\}$ は \mathcal{F} を含み有限交差性をもつから $\mathcal{F} \cup \{A\} = \mathcal{F}$ となり、 $A \in \mathcal{F}$ が従う。

(2) $A, A' \in \mathcal{E}$, $A \cup A' \in \mathcal{F}$, $A \notin \mathcal{F}$ とし、

$$\mathcal{G} = \{ F \in \mathcal{E} \mid A \cup F \in \mathcal{F} \}$$

とおく。 $\mathcal{F} \cup \{A'\} \subseteq \mathcal{G}$ である。 \mathcal{G} が有限交差性をもつことを示そう。 $F_0, \dots, F_{n-1} \in \mathcal{G}$ とすると、

$$A \cup \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} F_i \right) = \bigcap_{i=0}^{n-1} (A \cup F_i) \in \mathcal{F}$$

である。もし $\bigcap_{i=0}^{n-1} F_i = \emptyset$ ならば $A \in \mathcal{F}$ となり、 $A \notin \mathcal{F}$ であることに反する。故に

$\bigcap_{i=0}^{n-1} F_i \neq \emptyset$ が従う。したがって \mathcal{G} は有限交差性を持ち、 $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ となり、 $A' \in \mathcal{F}$ が従う。

(3) 対偶を示す。任意の $F \in \mathcal{F}$, $F' \in \mathcal{F}'$ に対して $F \cap F' \neq \emptyset$ とする。 $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ は \mathcal{F} と \mathcal{F}' を含み有限交差性をもつから $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}' = \mathcal{F}'$ が従う。 \square

$x \in X$ に対して $\mathcal{F}(x) = \{ A \in \mathcal{E} \mid x \in A \}$ とおく。これは filter である。

命題 3. $x \in X$ に対して以下は同値である。

- (1) $\mathcal{F}(x)$ は \mathcal{E} -ultrafilter である。
 (2) x を含まない任意の $A \in \mathcal{E}$ に対して, $x \in F, F \cap A = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{E}$ が存在する。

証明. (1 \Rightarrow 2) x を含まない $A \in \mathcal{E}$ に対して, $A \notin \mathcal{F}(x)$ であるから $A \cap F = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{F}(x)$ が存在する. $\mathcal{F}(x)$ の定義から $x \in F$ である.

(2 \Rightarrow 1) $\mathcal{F}(x) \subsetneq \mathcal{F}$ をみたす $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ について考える. $A \notin \mathcal{F}(x)$ をみたす $A \in \mathcal{F}$ が存在する. $x \in X \setminus A$ である. 条件 2 により $x \in F, A \cap F = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{E}$ が存在する. $F \in \mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}$ であり, $A \cap F = \emptyset$ であるから \mathcal{F} は有限交差性をもたない. \square

例 4. X を T_1 空間, \mathcal{E} として X の閉集合系 $\mathcal{A}(X)$ を考える. このとき任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{F}(x)$ は ultrafilter である. \square

命題 5. X 上の \mathcal{E} -ultrafilter \mathcal{F} に対して以下は同値である.

- (1) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ をみたす $x \in X$ が存在する.
 (2) $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

証明. (1 \Rightarrow 2) 明らか.

(2 \Rightarrow 1) $x \in \bigcap \mathcal{F}$ とする. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(x)$ であるから \mathcal{F} の極大性により $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ が従う. \square

集合 X 上の \mathcal{E} -ultrafilter 全体の集合を $\mathcal{W}(X, \mathcal{E})$ と書く. 任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{W}(X, \mathcal{E})$ であるとき, 写像 $w_{\mathcal{E}}: X \rightarrow \mathcal{W}(X, \mathcal{E})$ を $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ によって定める. これを単に w と書くこともある.

命題 6. 任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{W}(X, \mathcal{E})$ であるとする. このとき, 以下は同値である.

- (1) 任意の $x \in X$ に対して $\bigcap \mathcal{F}(x) = \{x\}$ である.
 (2) $w: X \rightarrow \mathcal{W}(X, \mathcal{E})$ は単射である.

証明. (1 \Rightarrow 2) $x, x' \in X, \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(x')$ とすると,

$$\{x\} = \bigcap \mathcal{F}(x) = \bigcap \mathcal{F}(x') = \{x'\}$$

であるから $x = x'$ が従う.

(2 \Rightarrow 1) $x \in X$ とする. $x \neq x'$ となる点 $x' \in X$ に対して, w が単射であるから

$\mathcal{F}(x) \neq \mathcal{F}(x')$ となる. 故に $F \cap F' = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{F}(x), F' \in \mathcal{F}(x')$ が存在する. よって $\bigcap \mathcal{F}(x) = \{x\}$ となる. \square

2 Wallman コンパクト化

2.1 定義と性質

定義. X を位相空間, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(X)$ とする. 任意の $A \in \mathcal{A}(X)$ に対して $A = \bigcap B'$ をみたす $B' \subseteq \mathcal{B}$ が存在するとき, \mathcal{B} を閉基という. \square

\mathcal{B} が閉基であることの必要十分条件は $\{A^c \mid A \in \mathcal{B}\}$ が開基となることである.

定義. X を T_1 空間, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}(X)$ とする. \mathcal{C} が以下をみたすとき, \mathcal{C} を T_1 基底という.

- (1) \mathcal{C} は閉基である.
- (2) \mathcal{C} は有限個の元の和および共通部分について閉じている.
- (3) 任意の $x \in X$ と, x を含まない任意の $A \in \mathcal{C}$ に対して, $x \in F, F \cap A = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{C}$ が存在する. \square

T_1 空間 X の T_1 基底を \mathcal{C} とする. \mathcal{C} -ultrafilter 全体の集合を $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ と書き, 特に $\mathcal{C} = \mathcal{A}(X)$ のとき $\mathcal{W}(X)$ と書く. $A \in \mathcal{C}, U = X \setminus A$ に対して

$$A_* = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C}) \mid A \in \mathcal{F} \}$$

$$U^* = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C}) \mid \exists F \in \mathcal{F} (F \subseteq U) \}$$

とおく.

命題 7. $A \in \mathcal{C}, U = X \setminus A$ とする. $\mathcal{F} \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ に対して以下は同値である.

- (1) $F \subseteq U$ をみたす $F \in \mathcal{F}$ が存在する.
- (2) $A \notin \mathcal{F}$.

証明.

$$F \subseteq U \text{ をみたす } F \in \mathcal{F} \text{ が存在する} \iff F \cap A = \emptyset \text{ をみたす } F \in \mathcal{F} \text{ が存在する}$$

$$\iff A \notin \mathcal{F}. \quad \square$$

系 8. \mathcal{C} を T_1 空間 X の T_1 基底, $A \in \mathcal{C}, U = X \setminus A$ とする. このとき次が成り立つ.

- (1) $A_* = \mathcal{W}(X, \mathcal{C}) \setminus U^*$.

$$(2) U^* = \mathcal{W}(X, \mathcal{C}) \setminus A_*. \quad \square$$

命題 9. \mathcal{C} を T_1 空間 X の T_1 基底, $A \in \mathcal{C}$ とする. このとき次が成り立つ.

- (1) $A = \emptyset \iff A_* = \emptyset.$
- (2) $A = X \iff A_* = \mathcal{W}(X, \mathcal{C}).$

証明. (1) $A \neq \emptyset$ とすると, $x \in A$ をみたす x が存在する. 故に $\mathcal{F}(x) \in A_*$ となり, $A_* \neq \emptyset$ が従う. 逆は明らかである.

(2) $A \neq X$ とすると, $x \notin A$ をみたす $x \in X$ が存在する. 故に $\mathcal{F}(x) \notin A_*$ となり, $A_* \neq \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ が従う. 逆は明らかである. \square

系 10. \mathcal{C} を T_1 空間 X の T_1 基底, $X \setminus U \in \mathcal{C}$ とする. このとき次が成り立つ.

- (1) $U = \emptyset \iff U^* = \emptyset.$
- (2) $U = X \iff U^* = \mathcal{W}(X, \mathcal{C}).$ \square

命題 11. \mathcal{C} を T_1 空間 X の T_1 基底, $A_i \in \mathcal{C}$ ($i = 0, 1$) とする. このとき次が成り立つ.

- (1) $(A_0 \cup A_1)_* = (A_0)_* \cup (A_1)_*.$
- (2) $(A_0 \cap A_1)_* = (A_0)_* \cap (A_1)_*.$

証明. (1)

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \in (A_0 \cup A_1)_* &\iff A_0 \cup A_1 \in \mathcal{F} \\ &\iff (A_0 \in \mathcal{F}) \vee (A_1 \in \mathcal{F}) \\ &\iff (\mathcal{F} \in (A_0)_*) \vee (\mathcal{F} \in (A_1)_*) \\ &\iff \mathcal{F} \in (A_0)_* \cup (A_1)_*. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \in (A_0 \cap A_1)_* &\iff A_0 \cap A_1 \in \mathcal{F} \\ &\iff (A_0 \in \mathcal{F}) \wedge (A_1 \in \mathcal{F}) \\ &\iff (\mathcal{F} \in (A_0)_*) \wedge (\mathcal{F} \in (A_1)_*) \\ &\iff \mathcal{F} \in (A_0)_* \cap (A_1)_*. \quad \square \end{aligned}$$

系 12. \mathcal{C} を T_1 空間 X の T_1 基底, $X \setminus U_i \in \mathcal{C}$ ($i = 0, 1$) とする. このとき次が成り立つ.

- (1) $(U_0 \cup U_1)^* = (U_0)^* \cup (U_1)^*.$

$$(2) (U_0 \cap U_1)^* = (U_0)^* \cap (U_1)^*. \quad \square$$

X を T_1 空間, \mathcal{C} を X の T_1 基底とする. $\mathcal{B} = \{A_* \mid A \in \mathcal{C}\}$ とおくと, $\emptyset_* = \emptyset$, $(A_0 \cup A_1)_* = (A_0)_* \cup (A_1)_*$ であるから \mathcal{B} が生成する位相 $T_{\mathcal{W}(X, \mathcal{C})}$ は \mathcal{B} を閉基としてもつ. 位相空間 $\langle \mathcal{W}(X, \mathcal{C}), T_{\mathcal{W}(X, \mathcal{C})} \rangle$ を単に $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ と書く.

定義. X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. f によって X と $f(X)$ が同相になるとき, f を埋め込みという. 埋め込み f が $\text{Cl}_Y(f(X)) = Y$ をみたすとき, 組 $\langle Y, f \rangle$ を X の拡張空間という. 特に Y がコンパクトであるとき, $\langle Y, f \rangle$ を X のコンパクト化という. $\langle Y, f \rangle$ を単に Y と書くこともある. \square

定理 13. 任意の T_1 空間 X , その任意の T_1 基底 \mathcal{C} に対して $\langle \mathcal{W}(X, \mathcal{C}), w \rangle$ は X の T_1 コンパクト化である.

証明. X を T_1 空間, \mathcal{C} を X の T_1 基底とする. まず, $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ が T_1 空間であることを示す. 任意の $\mathcal{F} \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ に対して $\{\mathcal{F}\} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A_*$ であることを示せばよい. $\mathcal{F} \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A_*$ であることは明らか. $\mathcal{F}' \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A_*$ とすると $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ が従い, \mathcal{F} の極大性により $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ となる. 故に $\{\mathcal{F}\} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A_*$ が従う.

次に, $w: X \rightarrow \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ が埋め込みであることを示す. $A \in \mathcal{C}$ に対して $w(A) = w(X) \cap A_*$ である.

$\therefore (\subseteq) x \in A, \mathcal{F}(x) \in w(A)$ とする. $A \in \mathcal{F}(x)$ であるから $\mathcal{F}(x) \in A_*$ が従う.

$(\supseteq) \mathcal{F} \in w(X) \cap A_*$ とする. $\mathcal{F} \in w(X)$ から $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ をみたす $x \in X$ が存在し, $\mathcal{F} \in A_*$ から $A \in \mathcal{F}$ が従う. 故に $x \in A$ となり, $\mathcal{F} \in w(A)$ が従う.

$G \subseteq X$ を閉集合とする. \mathcal{C} は X の閉基であるから, ある部分集合 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ が存在し $G = \bigcap \mathcal{C}'$ となる. $w(\bigcap \mathcal{C}') = w(X) \cap \bigcap \{A_* \mid A \in \mathcal{C}'\}$ である.

$\therefore (\subseteq)$

$$\begin{aligned} w\left(\bigcap \mathcal{C}'\right) &\subseteq \bigcap \{w(A) \mid A \in \mathcal{C}'\} \\ &= \bigcap \{w(X) \cap A_* \mid A \in \mathcal{C}'\} \\ &= w(X) \cap \bigcap \{A_* \mid A \in \mathcal{C}'\}. \end{aligned}$$

(\supseteq) $\mathcal{F} \in w(X) \cap \bigcap \{A_* \mid A \in \mathcal{C}'\}$ とする. $\mathcal{F} \in w(X)$ 故, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ をみたす $x \in X$ が存在する. $\mathcal{F} \in \bigcap \{A_* \mid A \in \mathcal{C}'\}$ 故, 任意の $A \in \mathcal{C}'$ に対して $A \in \mathcal{F}$ である. したがって $x \in \bigcap \mathcal{C}'$ となり, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x) \in w(\bigcap \mathcal{C}')$ が従う.

$\bigcap \{A_* \mid A \in \mathcal{C}'\}$ は $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ の閉集合であるから $w(X) \cap \bigcap \{A_* \mid A \in \mathcal{C}'\}$ は部分空間 $w(X)$ の閉集合である. 故に w が閉写像であることが従う. また, $A \in \mathcal{C}$ に対して

$$\begin{aligned} x \in w^{-1}(A_*) &\iff \mathcal{F}(x) \in A_* \\ &\iff A \in \mathcal{F}(x) \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

であるから $w^{-1}(A_*) = A$ が従い, w が連続であることがわかる. \mathcal{C} は T_1 空間 X の閉基であるから $\{x\} = \text{Cl}(\{x\}) = \bigcap \mathcal{F}(x)$ となり, 命題 6 によって w は単射となる. よって w は埋め込みである.

次に, $\text{Cl}(w(X)) = \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ であることを示す. F を $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ の閉集合で $F \neq \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ をみたすものとする. このとき $\mathcal{F} \notin F$ をみたす $\mathcal{F} \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ が存在する. $\{A_* \mid A \in \mathcal{C}\}$ は $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ の閉基であるから $\mathcal{F} \notin A_*$, $F \subseteq A_*$ をみたす $A \in \mathcal{C}$ が存在する. $A \notin \mathcal{F}$ であるから $A \neq X$ が従い, $x \notin A$ をみたす $x \in X$ が存在する. $A \notin \mathcal{F}(x)$ であるから $\mathcal{F}(x) \notin A_*$ となる. 故に $w(X) \not\subseteq F$ が従い, $\text{Cl}(w(X)) = \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ となることがわかる.

最後に, $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ がコンパクトであることを示す. $\{F_s \mid s \in S\}$ を $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ の空でない閉集合族で有限交差性をもつものとする. $\{A_* \mid A \in \mathcal{C}\}$ は $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ の閉基であるから $A_t \in \mathcal{C}$ によって $F_s = \bigcap_{t \in T_s} (A_t)_*$ と書ける. $T = \bigcup_{s \in S} T_s$ とおくと $\{A_t \mid t \in T\}$ は X の空でない閉集合族で有限交差性をもつから, これを含む $\mathcal{F} \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ が存在する.

$$\mathcal{F} \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A_* \subseteq \bigcap_{t \in T} (A_t)_* = \bigcap_{s \in S} F_s$$

故 $\bigcap_{s \in S} F_s \neq \emptyset$ が従う. よって $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ はコンパクトである. □

埋め込み $w: X \rightarrow \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ によって X と $w(X)$ を同一視する. 定理 13 と選択公理は ZF 上同値である ([KT13, Theorem 4.1]). $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ を T_1 空間 X の T_1 基底 \mathcal{C} に関する Wallman コンパクト化という. 特に $\mathcal{C} = \mathcal{A}(X)$ のとき, $\mathcal{W}(X)$ を X の Wallman コンパクト化という. $(\mathcal{W}(X), w)$ は定理 15 のような普遍性をもつ.

補題 14. A を位相空間 X の稠密部分集合, $\iota: A \rightarrow X$ を包含写像, f を A からコンパクト Hausdorff 空間 Y への連続写像とする. このとき, 以下は同値である.

(1) 図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & Y \end{array}$$

を可換にする連続写像 $h: X \rightarrow Y$ が存在する.

(2) Y の交わりをもたない任意の閉集合 B_0, B_1 に対して

$$\text{Cl}_X(f^{-1}(B_0)) \cap \text{Cl}_X(f^{-1}(B_1)) = \emptyset.$$

証明. (1 \Rightarrow 2) B_0, B_1 を Y の交わりをもたない閉集合とすると, $h^{-1}(B_0), h^{-1}(B_1)$ は X の交わりをもたない閉集合であるから

$$\text{Cl}_X(f^{-1}(B_0)) \cap \text{Cl}_X(f^{-1}(B_1)) \subseteq h^{-1}(B_0) \cap h^{-1}(B_1) = \emptyset.$$

が従う.

(2 \Rightarrow 1) $x \in X$ とする. x の開近傍全体の集合を $\mathcal{N}(x)$ と書く. Y の閉集合族

$$\{ \text{Cl}(f(A \cap U)) \mid U \in \mathcal{N}(x) \}$$

は有限交差性をもつ.

\therefore A の稠密性により, 任意の $U \in \mathcal{N}(x)$ に対して $\text{Cl}(f(A \cap U))$ は空でない.

$U_0, \dots, U_{n-1} \in \mathcal{N}(x)$ に対して $\bigcap_{i=0}^{n-1} U_i \in \mathcal{N}(x)$ であり,

$$\text{Cl}\left(f\left(A \cap \bigcap_{i=0}^{n-1} U_i\right)\right) \subseteq \text{Cl}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} f(A \cap U_i)\right) \subseteq \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Cl}(f(A \cap U_i))$$

である.

Y がコンパクト故 $\bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \text{Cl}(f(A \cap U)) \neq \emptyset$ である. $\bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \text{Cl}(f(A \cap U))$ は一点集合である.

\therefore $y_0, y_1 \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \text{Cl}(f(A \cap U))$, $y_0 \neq y_1$ と仮定する. Y はコンパクト Hausdorff 空間であるから正規空間である. 故に $\text{Cl}(V_0) \cap \text{Cl}(V_1) = \emptyset$ をみたす $V_0 \in \mathcal{N}(y_0)$,

$V_1 \in \mathcal{N}(y_1)$ が存在する. f の連続性によって

$$\text{Cl}_X(f^{-1}(V_i)) \subseteq \text{Cl}_X(\text{Cl}_A(f^{-1}(V_i))) \subseteq \text{Cl}_X(f^{-1}(\text{Cl}(V_i))) \quad (i = 0, 1)$$

となり, 条件 2 によって

$$\text{Cl}_X(f^{-1}(V_0)) \cap \text{Cl}_X(f^{-1}(V_1)) = \emptyset$$

となる. 故に

$$x \notin \text{Cl}_X(f^{-1}(V_0)) \vee x \notin \text{Cl}_X(f^{-1}(V_1))$$

が従う. 一般性を損なわないため $x \notin \text{Cl}_X(f^{-1}(V_0))$ とする. $X \setminus \text{Cl}_X(f^{-1}(V_0)) \in \mathcal{N}(x)$ であるから

$$y_0 \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \text{Cl}(f(A \cap U)) \subseteq \text{Cl}(f(A \setminus \text{Cl}_X(f^{-1}(V_0))))$$

となる. 一方, $f(A \setminus \text{Cl}_X(f^{-1}(V_0))) \subseteq Y \setminus V_0$ である.

$\therefore y \in f(A \setminus \text{Cl}_X(f^{-1}(V_0)))$ とする. $f(x) = y$ をみたく $x \in A \setminus \text{Cl}_X(f^{-1}(V_0))$ が存在する. $x \in A \setminus f^{-1}(V_0)$ 故 $y = f(x) \in Y \setminus V_0$ となる.

故に $y_0 \notin \text{Cl}(f(A \setminus \text{Cl}_X(f^{-1}(V_0))))$ となり矛盾する. よって $y_0 = y_1$ が従う.

$\bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \text{Cl}(f(A \cap U)) = \{h(x)\}$ とする. 特に $x \in A$ ならば $f(x) = h(x)$ であるから図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & Y \end{array}$$

は可換である. h が連続であることを示す. $x \in X, V \in \mathcal{N}(h(x))$ とする.

$$\{h(x)\} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \text{Cl}(f(A \cap U)) \subseteq V$$

である. Y がコンパクトであるから閉集合 $Y \setminus V$ はコンパクトであり, 有限集合 $\{U_0, \dots, U_{k-1}\} \subseteq \mathcal{N}(x)$ で $\bigcap_{j=0}^{k-1} \text{Cl}(f(A \cap U_j)) \subseteq V$ をみたくものが存在する. $U' =$

$\bigcap_{j=0}^{k-1} U_j$ とおくと $U' \in \mathcal{N}(x)$ である. U' は開集合であるから任意の $x' \in U'$ に対して

$U' \in \mathcal{N}(x')$ であり,

$$\begin{aligned} h(x') \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x')} \text{Cl}(f(A \cap U)) &\subseteq \text{Cl}(f(A \cap U')) \\ &\subseteq \text{Cl}\left(\bigcap_{j=0}^{k-1} f(A \cap U_j)\right) \subseteq \bigcap_{j=0}^{k-1} \text{Cl}(f(A \cap U_j)) \subseteq V \end{aligned}$$

となる. 故に $h(U') \subseteq V$ が従う. □

定理 15. X からコンパクト Hausdorff 空間 Y への任意の連続写像 f に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{w} & \mathcal{W}(X) \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & Y \end{array}$$

を可換にする連続写像 $h: \mathcal{W}(X) \rightarrow Y$ が一意的存在する.

証明. 一意性は Y が Hausdorff 空間であることから従う. B_0, B_1 を Y の閉集合で交わりをもたないものとする. $f^{-1}(B_0), f^{-1}(B_1)$ は X の閉集合で交わりをもたない.

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{\mathcal{W}(X)}(f^{-1}(B_0)) \cap \text{Cl}_{\mathcal{W}(X)}(f^{-1}(B_1)) &\subseteq (f^{-1}(B_0))_* \cap (f^{-1}(B_1))_* \\ &= (f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1))_* = \emptyset \end{aligned}$$

であるから, 補題 14 により図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{w} & \mathcal{W}(X) \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & Y \end{array}$$

を可換にする連続写像 $h: \mathcal{W}(X) \rightarrow Y$ が存在する. □

2.2 Hausdorff 性

定義. \mathcal{C} を T_1 空間 X の T_1 基底とする. \mathcal{C} が「 A, A' を $A \cap A' = \emptyset$ となる \mathcal{C} の元とすると, $A \cap F = \emptyset, A' \cap F' = \emptyset, F \cup F' = X$ をみたす $F, F' \in \mathcal{C}$ が存在する」をみたすとき, \mathcal{C} を正規基底という. □

例 16. 正規空間 X の閉集合系 $\mathcal{A}(X)$ は X の正規基底である. □

命題 17. T_1 空間 X が正規基底 \mathcal{C} をもつとき, X は Hausdorff 空間である.

証明. $x, x' \in X, x \neq x'$ とする. X が T_1 空間だから一点集合は閉集合であり, $x' \notin \{x\}$ である. \mathcal{C} は X の正規基底であるから $x' \notin F, \{x\} \subseteq F$ をみたす $F \in \mathcal{C}$ が存在し, この F と x' に対して $x' \in F', F' \cap F = \emptyset$ をみたす $F' \in \mathcal{C}$ が存在する. 再び \mathcal{C} が X の正規基底であることを用いると

$$F \cap G = \emptyset, \quad F' \cap G' = \emptyset, \quad G \cup G' = X$$

をみたす $G, G' \in \mathcal{C}$ が存在する. $X \setminus G, X \setminus G' \subseteq X$ は

$$F \subseteq (X \setminus G), \quad F' \subseteq (X \setminus G'), \quad (X \setminus G) \cap (X \setminus G') = \emptyset$$

をみたす開集合である. □

命題 18. \mathcal{C} を T_1 空間 X の正規基底とすると, $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ は Hausdorff 空間である.

証明. $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C}), \mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$ とする. このとき $F \cap F' = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{F}, F' \in \mathcal{F}'$ が存在する. \mathcal{C} は X の正規基底であるから

$$F \cap G = \emptyset, \quad F' \cap G' = \emptyset, \quad G \cup G' = X$$

をみたす $G, G' \in \mathcal{C}$ が存在する. $U = X \setminus G, V = X \setminus G'$ とおくと, $U^*, V^* \subseteq \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ は

$$\mathcal{F} \in U^*, \quad \mathcal{F}' \in V^*, \quad U^* \cap V^* = (U \cap V)^* = \emptyset$$

をみたす開集合である. □

特に $\mathcal{C} = \mathcal{A}(X)$ の場合, 逆が成り立つ.

命題 19. X を T_1 空間とし, $\mathcal{W}(X)$ が Hausdorff 空間であるとする. このとき, X は正規空間である.

証明. $A, B \subseteq X$ を交わりをもたない閉集合とする. このとき $A_*, B_* \subseteq \mathcal{W}(X)$ は交わりをもたない閉集合である. $\mathcal{W}(X)$ はコンパクト Hausdorff 空間であるから正規空間であり,

$$A_* \subseteq U, \quad B_* \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset$$

をみたす開集合 $U, V \subseteq \mathcal{W}(X)$ が存在する. $X \cap U, X \cap V$ は X の開集合であり,

$$A \subseteq (X \cap U), \quad B \subseteq (X \cap V), \quad (X \cap U) \cap (X \cap V) = \emptyset$$

をみたす. □

2.3 Stone-Čech コンパクト化との関係

定義. X を T_1 空間とする. 任意の $x \in X$ と, x を含まない任意の閉集合 F に対して, X 上の連続関数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ で

$$f(x) = 0, \quad \forall y \in F (f(y) = 1)$$

をみたすものが存在するとき, X を完全正則空間という. □

正規空間は完全正則空間であり, 完全正則空間は正則空間である.

定理 20 (Stone-Čech コンパクト化). 任意の位相空間 X に対して, コンパクト Hausdorff 空間 $\beta(X)$ と連続写像 $\eta_X: X \rightarrow \beta(X)$ の組 $\langle \beta(X), \eta_X \rangle$ で次の普遍性をみたすものが存在する: 任意のコンパクト Hausdorff 空間 Y と任意の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $f = \tilde{f} \circ \eta_X$ をみたす連続写像 $\tilde{f}: \beta(X) \rightarrow Y$ が一意的に存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \beta(X) \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & Y \end{array} \quad \square$$

X が完全正則空間のとき, $\langle \beta(X), \eta_X \rangle$ は X の T_2 コンパクト化となる.

定理 21. X を正規空間としたとき, X の Wallman コンパクト化 $\langle \mathcal{W}(X), w \rangle$ と X の Stone-Čech コンパクト化 $\langle \beta(X), \eta_X \rangle$ について, 図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{w} & \mathcal{W}(X) \\ & \searrow \eta_X & \downarrow \cong \\ & & \beta(X) \end{array}$$

を可換にする同相写像 $\mathcal{W}(X) \rightarrow \beta(X)$ が存在する. □

参考文献

[Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology*, Vol. 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann, Berlin, 1989.

- [KT13] Kyriakos Keremedis and Eleftherios Tachtsis. Wallman compactifications and Tychonoff's compactness theorem in ZF. *Topology Proceedings*, Vol. 42, pp. 275–297, January 2013.
- [見玉 74] 見玉之宏, 永見啓忖. 位相空間論. 岩波書店, 1974.